Yang-Mills ゲージ理論とその4次元トポロジーへの応用

11/8 の幾何

谷口正樹

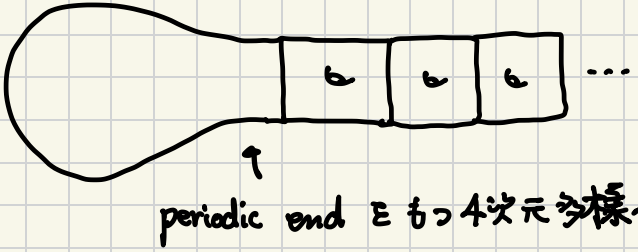
京大理

古田先生との関係

2015年　東大数理入学(修士)，古田研究室に入る

修論；非コンパクト4次元多様体上の Yang-Mills ゲージ
理論の展開，その応用





そこから　継続的に YM ゲージ
理論の研究を行う

カリフォルニア大　バークレー校にて

古田幹雄の年表

1983; 東大理. 数学科卒 ← Donaldson, Freedmanによる衝撃の業績

1985; 同学 修士修了

1988; 同学 博士修了

古田先生のゲージ理論に関わる業績

1987 ~ 1993; 継続的に Yang-Mills インスタントン ゲージ理論の論文をかかれる

このtalkではココに焦点をあて. 紹介する

1995 ~ Seiberg-Witten 理論に関する論文

古田先生の残した思想

① Yang-Mills ゲージ理論 ∈ "non linear Fredholm theory"

② (局所)群作用の固定 instanton から豊かな幾何が現れる

③ 3次元 ホモロジー 同境群が深いこと

④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

Yang-Mills ゲージ理論概説

(X,g): 有向 Riemannian 4-mfd　　P: 主 $SU(2)$ 束 over X

$A = \{A_\alpha\}_\alpha$: conn on P　　$A_\alpha \in \Omega^1_{U_\alpha} \otimes su(2)$

ASD eq　$(1+*)F_A = 0$ $\underset{\text{iff}}{\Longleftrightarrow}$ $(1+*)(dA_\alpha + A_\alpha \wedge A_\alpha) = 0$

Hodge star operator　　curvature

A: インスタントン, ASD conn

非 cpt の時は, assymptotic cond つき

$$\mathcal{M}_{(X,g)}(P) := \{A : \text{conn on } P \mid (1+*)F_A = 0\} \big/ \mathrm{Aut}(P)$$

ゲージ群

instanton moduli space

(X,g), P が条件をみたす時, (必要であれば perturb して)

$\mathcal{M}_{(X,g)}(P)$ は, 有限個の点をのぞいて fin dim manifold に

時代背景

1970年代　$X = \mathbb{R}^4$, g; standard metric　P: product bdl

A: conn　$S(A) := \frac{1}{8\pi^2} \| F_A \|^2_{L^2(\mathbb{R}^4)}$: action functional

エネルギー　$= -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{tr}\,(F_A \wedge * F_A)$

$d_A S = 0 \iff * d_A * F_A = 0$: Yang-Mills equation

$d_A F_A = 0$; Bianchi identity

ASD　$* F_A = - F_A$　$\Rightarrow$　YM eq をみたす

path-integral として　$\int_{\mathcal{A}/\mathcal{G}} e^{-S(A)} \mathcal{D}A$

QCDでは
SU(3), spinor part あり

インスタントン解は、この path integral の非摂動な現象と関わる

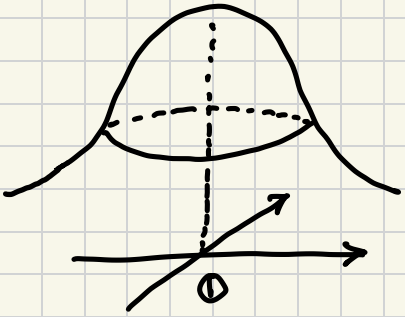
1975年. BPST (Belavin - Polyakov - Schwartz - Tyupkin)

explict な ASD sol をつくった

$\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ $\quad q = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$

中心 0, スケール $\rho > 0$ standard 1-instanton

$$A_\rho = \frac{\mathrm{Im}(\bar{q}\, dq)}{\rho^2 + |q|^2} \in \Omega^1_{\mathbb{R}^4} \otimes \mathrm{Im}\,\mathbb{H},$$



$|F_{A_\rho}|$ $\quad S(A_\rho) = 1$



? $S(A) = k \geq 2$

$\mathbb{CP}^3$ 上の条件つき $k=2$ sol bdl の moduli

線形代数に帰着

⇝ 't Hooft, Witten, Ward, ADHM

"instanton" (局在する場の配置)

1977, 78年, Atiyah - Hitchin - Singer X : closed

Analize local description of $\mathcal{M}_{(X,g)}(P)$ $k := \langle c_2(P), [X] \rangle$

$$0 \to \Omega^0(\mathrm{ad}(P)) \xrightarrow[d_A]{} \Omega^1(\mathrm{ad}(P)) \xrightarrow[d_A^+]{} \Omega^+(\mathrm{ad}(P)) \to 0$$

$$+ := \frac{1}{2}(1 + *)$$

$$T_{[A]}\mathcal{M}_{(X,g)}(P) \cong \ker d_A^+ / \mathrm{Im}\, d_A \quad \text{when} \quad \begin{cases} d_A^+ : \text{surj} \\ d_A : \text{inj} \end{cases}$$

$$\therefore \pi = 8k - 3(1 - b_1(X) + b^+(X))$$

Ex $\mathcal{M}_{(S^4,g)}(P_k)$

の次元は $8k - 3$.

$\mathcal{M}_{(\mathbb{R}^4, g_{\mathrm{std}})}(P_k) \underset{\text{diffeo}}{\overset{\text{ASD eq is conformal inv \& removing sing}}{\cong}} \mathcal{M}_{(S^4,g)}(P_k)$

1982年　Uhlenbeck, Taubes

$\mathcal{M}_{(X,g)}(P)$ の geometric な Compact 化を可能にする深い解析

Uhlenbeck ; インスタントンの列は一般に有限個の点を

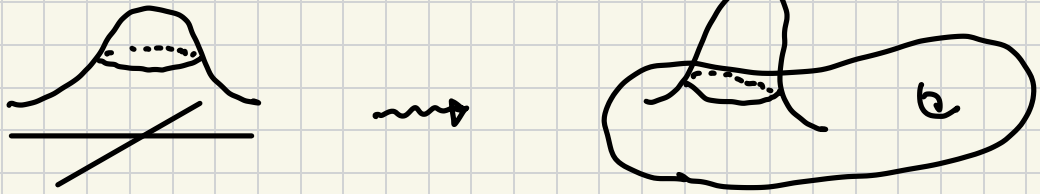
のぞくと収束する (after taking sub seq)



しかも、その singularity を (up to gauge で) 解消できる (1979)

Taubes ; gluing という手法

解を移植する



1983 Donaldson, "Theorem A"

X : closed ori smooth 4-mfd $\pi_1(X) = \{e\}$

$I : H^2(X) \otimes H^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$: intersection form

[Thm (Donaldson, 1983) I : neg def $\Rightarrow$ $I \cong \bigoplus_{\#I} (-1)$

Ex $-nE_8$, $n > 0$ $E_8 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

cann't be smoothable

1982 Freedman top 4-mfd の分類理論

$\rightsquigarrow$ exotic $\mathbb{R}^4$ の存在」

古田先生学部卒業

X : closed ori smooth 4-mfd $\pi_1(X) = \{e\}$

$I : H^2(X) \otimes H^2(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$: intersection form

[Thm (Donaldson, 1983) I : neg def $\Rightarrow$ $I \cong \bigoplus_{\text{rk } I} (-1)$

$\langle c_2(P_k), [X] \rangle = k$

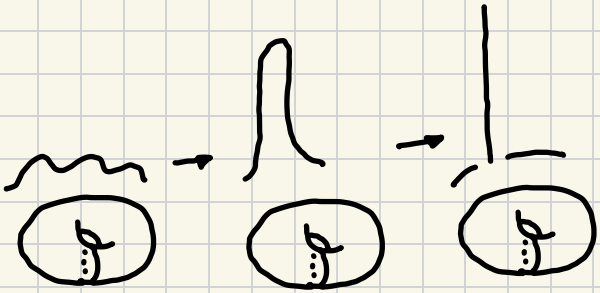
$\mathcal{M}_{(X,g)}(P_1)$ ↗ w/ small perturbation

ori smooth 5 mfd

U(1) ASD conn's

$\pm \mathbb{CP}^2, \cdots, \pm \mathbb{CP}^2$

of $\pm \mathbb{CP}^2$ $= \{ x \in H^2(X;\mathbb{Z}) \mid x^2 = -1 \} / \pm 1$



∞近 $\cong [0,\infty) \times X$

Taubes gluing

+ Uhlenbeck's argument

古田先生の残した思想

① Yang-Mills ゲージ理論 ∈ "non linear Fredholm theory"

② (局所)群作用の固定 instanton から豊かな幾何が現れる

③ 3次元ホモロジー同境群が深いこと

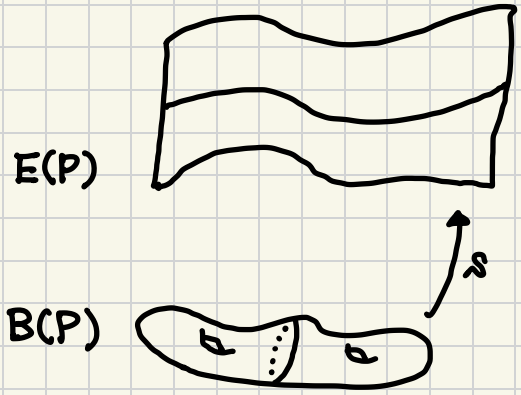
④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

① "non linear Fredholm theory"

X: closed ori 4-mfd , g: metric , P: 主$SU(2)$束 (I: Xの交叉形式 が正の固有値もつ + g: generic + P: nm flat or based gauge)

$\mathcal{M}_{(X,g)}(P) = s^{-1}(0)$: zero set of Fredholm section

$s : \mathcal{B}(P) \longrightarrow \mathcal{E}(P)$: C^∞ section



$\mathcal{B}(P)$: C^∞ Banach mfd

$\mathcal{E}(P) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(P)$: C^∞ Banach bundle

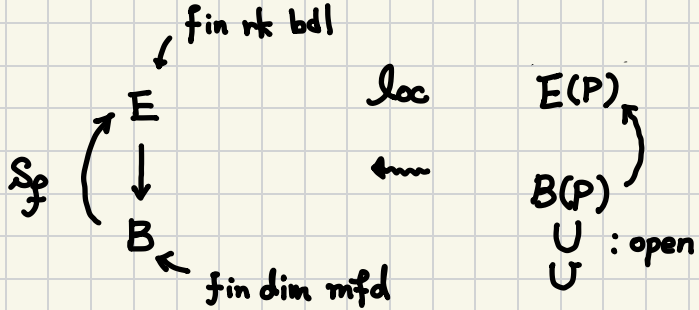
s: Fredholm $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $pr_{\text{fiber}} \circ ds : T_x \mathcal{B}(P) \longrightarrow E_x$: Fredholm

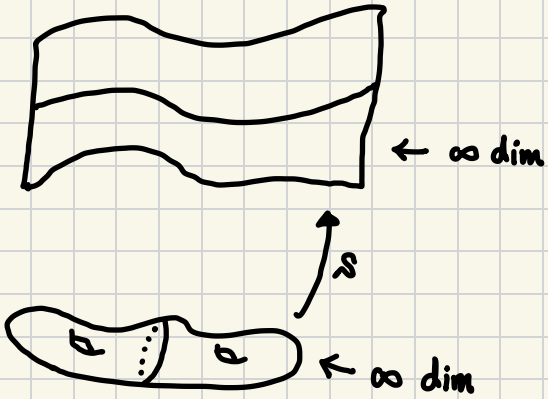
ker, cok : fin dim

① "non linear Fredholm theory"

Kuranishi chart Fredholm section の zero set は. local には.

fin dim mfd 上の fin dim vect bdl の section の zero set と同じ





有限次元近似 $\longrightarrow$ $S_f^{-1}(0) = s^{-1}(0) \cap U$

Uの大きさは. 定量的に 評価できる

$\rightsquigarrow$ この U をでかくしていく in Seiberg-Witten theory $\rightsquigarrow$ 10/8 ineq

① "non linear Fredholm theory"

YM理論では、この system が P の同型類 $k = \langle c_2(P), [X] \rangle$ に parametrize される

$$\mathcal{M}_{(X,g)}(P_k) = S_k^{-1}(0) \qquad S_k : \mathcal{B}(P_k) \longrightarrow \mathcal{E}(P_k)$$

- $\mathcal{M}_{(X,g)}(P_k)$ の compact 化に $\mathcal{M}_{(X,g)}(P_j)$ が現れる」
- $\mathcal{M}_{(X,g)}(P_k)$ には $\mathbb{CP}^n$ の cone type の singularity も現れる

古田先生の仕事 (1987) ; $\mathcal{M}_{(X,g)}(P_k)$ を local perturb する一般論と構築」

$$\frac{1}{2}(1+*)F_A + \underbrace{\sigma(A)}_{\text{Compact perturbation}} = 0$$

上の2つの構造とこわさない」

① "non linear Fredholm theory"

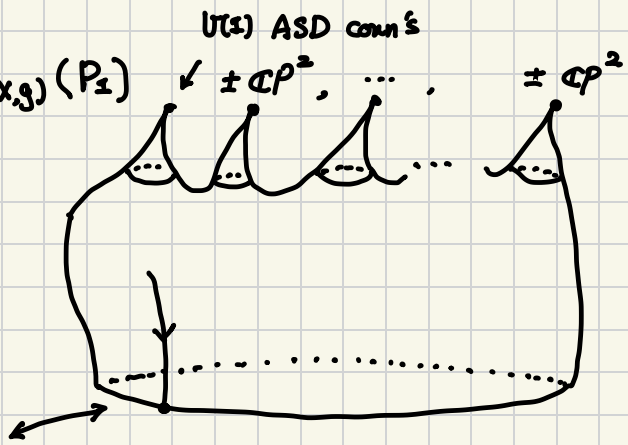
[Thm (Furuta, 1987) I : neg def $\Rightarrow I \cong \bigoplus_{\#I} (-1)$ holds when $H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$

Original proof

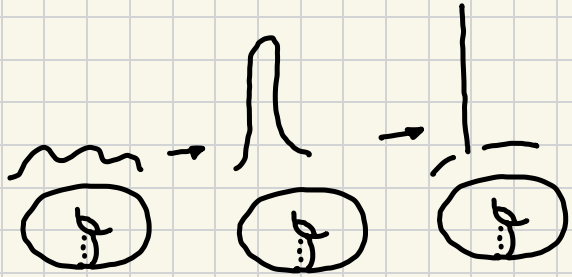
$\langle c_2(P_k), [X] \rangle = k$

$\mathcal{M}_{(X,g)}(P_k)$ ↗ w/ small perturbation

ori smooth 5 mfd



∞近 $\cong [0,\infty) \times X$



Taubes の gluing
+ Uhlenbeck's argument

① "non linear Fredholm theory"

$$\mathcal{M}_{(X,g)}(P_1) \quad \mathcal{M}_{(X,g)}(P_0) = \mathrm{Hom}\left(\pi_1(X), SU(2)\right)\Big/_{SU(2)}$$

$$[A_n] \longrightarrow [A_\infty] \quad \uparrow$$

$$\frac{1}{8\pi^2}\|F_A\|_{L^2}^2 = \langle c_2(P_0), [X]\rangle = 0$$

$\pi_1 = \{e\} \Rightarrow \mathcal{M}_{(X,g)}(P_0) = \{[\theta]\}$

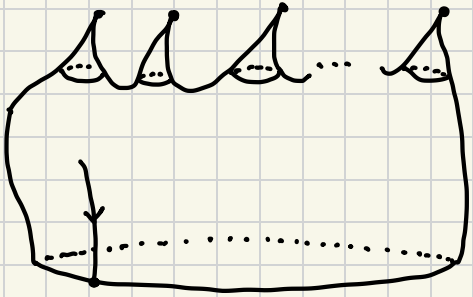
$H_1(X;\mathbb{Z}) = 0 \Rightarrow \mathcal{M}_{(X,g)}(P_0) = \{[\theta]\} \cup \mathrm{Hom}\left(\pi_1(X), SU(2)\right)^*\Big/_{SU(2)}$ (irreducible)

$\uparrow$

formal dim $= -3$

perturbation で transverse にして消す

+ 対応する $\mathcal{M}_{(X,g)}(P_1)$ の ∞ 遠も perturb する



同じ picture が得られる

① "non linear Fredholm theory"

この perturbation のモデルは $M_{(X,g)}(P_k)$ を調べる上での基盤となす（Donaldson も同時期に Taubes を使った perturbation を導入）

又、方程式を変えた Seiberg-Witten theory でも意味をもつ

類似の techique として Ruan's virtual nbd, FOOO Kuranishi space, …… がある。

この type の abstract perturbation は、今野さんのゲージ理論的特性類の構成で crucial に使われている

② (局所)群作用の固定 instanton から豊かな幾何が現れる

$X = S^4$, g: standard metric　　$\mathcal{M}_{(S^4,g)}(P_k)$

Thm (Furuta 1987, Furuta-Hashimoto 1990)

$$e\left(\mathcal{M}_{(S^4,g)}(P_k)\right) = d(k) : k\text{の約数の個数}$$

$T^2 \subset SO(4) \subset SO(5) \curvearrowright S^4$

↑ maximal torus　　北極と南極を fix

Donaldson による $\mathbb{CP}^2$ 上の $rk=2$ Hol bdl を用いた証明 1984

$$\left(\mathcal{M}_{(S^4,g)}(P_k)\right)^{T^2} \cong \bigcup \left\{ \begin{array}{l} T^2\text{-inv} \\ \text{ASD on } ad(P_k) \end{array} \right\} \Big/ T^2\text{-inv gauge}$$

$d(k)$ コ

($T^2 \curvearrowright ad(P_k)$ lift ↑ $d(k)$ コの component)

$\mathbb{Z}_p \subset T^2$ の場合も考察

② (局所)群作用の固定 instanton

$\mathbb{Z}_p = \Gamma \subset T^2 \subset SO(4) \subset SO(5) \curvearrowright \mathcal{M}_{(S^4,g)}(P_k)$

bdl への lift をとり

$$\{\ \Gamma\text{-inv ASD on } P_k\ \} \Big/ \mathrm{Aut}(P_k)^\Gamma$$

$\mathbb{Z}_p$-invariant instanton $\rightleftarrows$ $L(p,q)$ (lens space) $\times \mathbb{R}$ 上の instanton

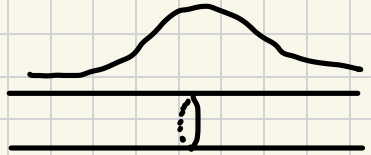
w/ asymptotic cond

Donaldson 1984
$\mathbb{CP}^2$ 上の hol bdl
Kaneyama 1975

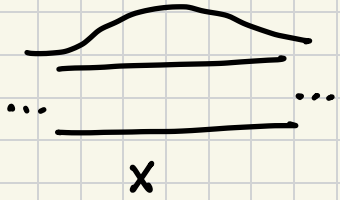
→ これの計算 ; 1次元成分の決定

Furuta 1990

$L(p,q)\times\mathbb{R}$ ⇝



② (局所)群作用の固定 instanton



$X = L(p,q) \times \mathbb{R}$　　g = standard met + dt^2

Ⅰ X 上の fin energy instanton A の energy は $\frac{1}{p}$ の倍数

$$S(A) = \frac{1}{8\pi^2}\|F_A\|_{L^2}$$

Ⅱ $L(p,q) \times [T, \infty)$ 側で自明接続に収束し energy が $\frac{1}{p}$ に instanton が存在

⇒ $q \equiv 1 \bmod p$, この condition で moduli は 1次元, moduli $\cong \mathbb{R}$

Y, Y' : closed ori 3-mfd

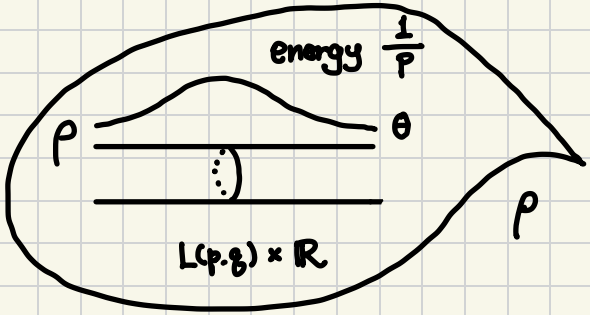
$Y \underset{\text{H-cob}}{\sim} Y' \iff \exists W$: smooth Compact ori 4-mfd cobordism from Y to Y'

s.t. $H_*(Y) \xrightarrow{\cong} H_*(W) \xleftarrow{\cong} H_*(Y')$

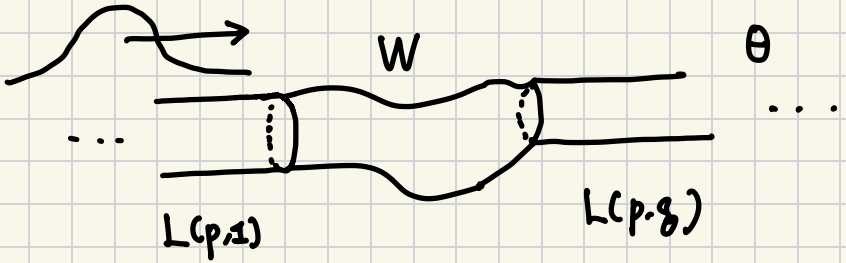
② (局所)群作用の固定 instanton ⇝ 豊かな幾何

Fintushel-Stern (1987), 古田先生の proof

Observation $L(p,1) \underset{\text{H coh}}{\sim} L(p,q) \Rightarrow q \equiv 1 \bmod p$

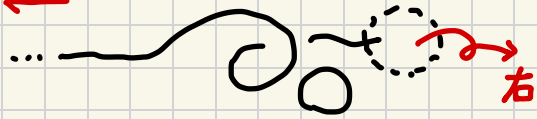


instanton moduli : 1 dim



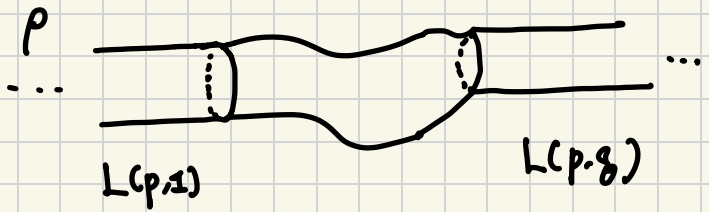
左へスライド

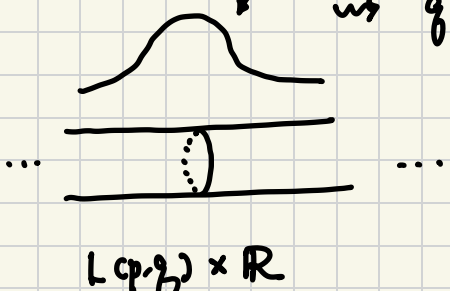
moduli =



右にスライド

energy $\frac{1}{p}$ の instanton ⇝ $q \equiv 1 \bmod p$





② (局所)群作用の固定 instanton ⇝ 豊かな幾何

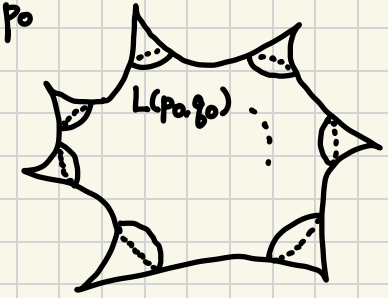
Fintushel-Stern 1985 ~ ; 4-orbifold 上で YM instanton theory を展開

Thm (1992, Furuta) X : smooth closed ori 4-orbifold

w/ n cyclic singularities $\cong$ cone of $L(p_i, q_i)$ $i \in \{0, \cdots, n\}$

$H_1(X;\mathbb{Z}) = 0$ $H_2(X;\mathbb{Q}) = 0$, $p_0 \neq 4$, $q_0 = 1$. $p_0 \geq p_i$ $\forall i$ 」

$\Rightarrow$ $\exists j_0 > 0$ $p_{j_0} = p_0$, $q_{j_0} = -1 \bmod p_0$



⇝ Fukumoto 2019, Uniformization of neg def 4-orbifolds

② (局所)群作用の固定 instanton

Seifert 3-mfd に広げる

$$\Sigma(p,q,r) = \{(x,y,z)\in\mathbb{C}^3 \mid x^p+y^q+z^r=0\} \cap S^5$$

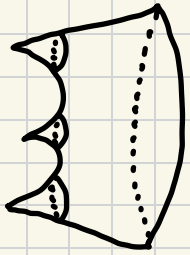
p,q,r : どの2組も互いに素 $\Rightarrow$ $H_*(\Sigma(p,q,r)) \cong H_*(S^3)$

$\zeta \in S^1$ $\quad \zeta\cdot(x,y,z) := (\zeta^{qr}x,\ \zeta^{pr}y,\ \zeta^{pq}z)$ $\quad\rightsquigarrow\quad$ $S^1 \curvearrowright \Sigma(p,q,r)$

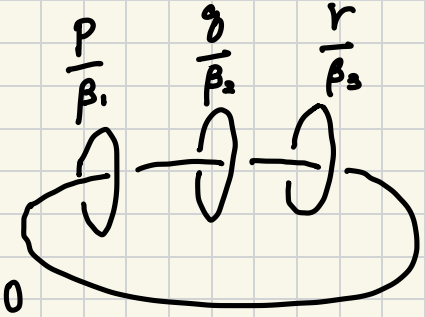
$$S^1 \to \Sigma(p,q,r) \xrightarrow{\pi} \Sigma/S^1 = \overset{\vee}{S}{}^2$$

Mapping cylinder of π $= \Sigma(p,q,r)\times[0,1] \cup \overset{\vee}{S}{}^2 \big/ (x,1)\sim\pi(x)$

$W(p,q,r)$ とおく ;

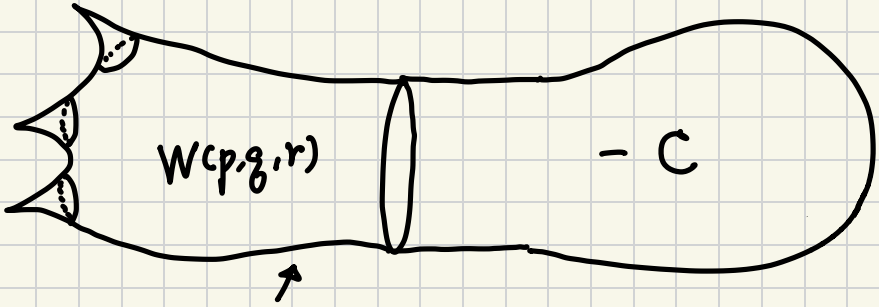


$\Sigma(p,q,r)$



② (局所)群作用の固定 instanton

$W(p,g,r)$ がある条件をみたす orb bdl をもつ $\Sigma(p,g,r)$ は、ある type の cpt ori smooth 4-mfd C の ∂ になれない



$\check{X}$

ある orbifold $SO(3)$ bdl P を考える

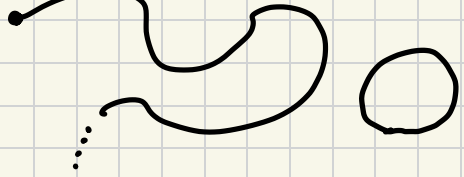
Fintushel-Stern の考察 (1985)

$M_{(\check{X},\check{g})}(P)$: 1-dim mfd

unique ∂

& compact

w/ $\mathbb{C}/U(1)$ $SO(3)$ ASD sol



② (局所)群作用の固定 instanton ⇝ 豊かな幾何

loc grp action $\Gamma \curvearrowright \tilde{U}$ $\quad \tilde{U}/\Gamma \subset X$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Gamma} & \curvearrowright & \tilde{P} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma & \curvearrowright & \tilde{U} \end{array} \rightsquigarrow \text{orbifold instanton moduli}$$

Ⅰ Lens space の Floer homology　　Daemi - Scaduto '24

Furuta 1991, Sasahira '13 ⇝ singular instanton homology of two bridge

Ⅱ orbifold Seiberg–Witten theory

Fukumoto - Furuta '00, Ue - Fukumoto - Furuta '01, Fukumoto - Taniguchi '26　Shirahama '26

Ⅲ real Seiberg - Witten theory

Nakamura '13 ~, Y. Kato '22, Konno - Miyazawa - Taniguchi ....

③ 3次元ホモロジー同境群が深いこと

closed n-mfd Y が $\mathbb{Z}HS^n \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} H_*(Y;\mathbb{Z}) \underset{\exists}{\cong} H_*(S^n;\mathbb{Z})$

$* \in \{\text{smooth}, \text{PL}, \text{top}\}$

$\Theta^n_{\mathbb{Z}}(*) := \{\text{ori } \mathbb{Z}HS^n \text{ in } * \text{cat}\} / Y_0 \underset{h}{\sim} Y_1$

$\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists W : (n+1)\text{-dim cpt ori } *\text{ mfd}$

$*$-hom cob

$\partial W = -Y_0 \sqcup Y_1$

$H_*(Y_i) \xrightarrow{\cong} H_*(W)$

abelian group

$[Y] + [Y'] := [Y \# Y']$

$-[Y] = [-Y]$

$0 = [S^n]$

③ 3次元 ホモロジー同境群が深いこと

	$n=3$	$n=4$	$n\geq 5$
Smooth	$\Theta^3_{\mathbb{Z}}$	0 González-Acuña 1970	Θ^n Kervaire-Milnor 1963 González-Acuña 1970
PL	$\Theta^3_{\mathbb{Z}}(PL) \cong \Theta^3_{\mathbb{Z}}$ Cairns 1944...	0 Kervaire 1969	
top	0 Freedman 1982	0	kill π_1 & top Poincaré conj

1978.80 Matumoto, Galewski-Stern

$n\geq 5$ top closed n-mfd M has triangulation

$\Leftrightarrow$ iff

$0 = \Delta_M \in H^5(M; \ker \mu)$

$\mu: \Theta^3_{\mathbb{Z}} \twoheadrightarrow \mathbb{Z}_2$: Rochlin hom

③ 3次元 ホモロジー 同境群が 深いこと

Thm (Fintushel-Stern 1985)

$$\mathbb{Z} \subset \Theta^3_{\mathbb{Z}} \quad (\text{gen by } \Sigma(p,q,pq-1))$$

p,q : coprime

Thm (Furuta, FS, 1990)

$$\mathbb{Z}^\infty \subset \Theta^3_{\mathbb{Z}} \quad (\text{gen by } \{\Sigma(p,q,pq^k-1)\}_{k=1}^{\infty})$$

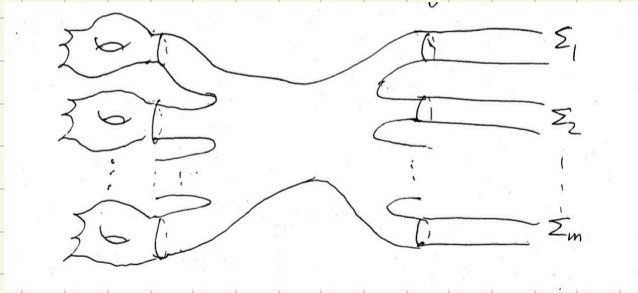
③ 3次元 ホモロジー 同境群が 深いこと

数理解析研究所講究録
662巻 1988年 1-18

ホモロジー3球面と自己双対接続

東大理 古田幹雄 (Mikio Furuta)

このノートは、第一に3次元多様体間の同境関係を扱う手段として、自己双対接続のモジュライ空間を用いる方法の紹介と、第二にこの方法の応用として有向ホモロジー3球面のなす有向ホモロジー同境群 $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ が、2の(可算)無限直和を部分群として持つことの紹介を目標とします。前者においては、理念の記述に重きをおいてたか、解析的手法については[T], [FS]を参照して下さい。後者は[F]の紹介ですが、81年度 Global Analysis 研究集会(名古屋大学)の予稿と一部重複することをあらかじめお断わりします。



↑

この ofd パート w/ unique SO(2) instanton つきの ofd bdl

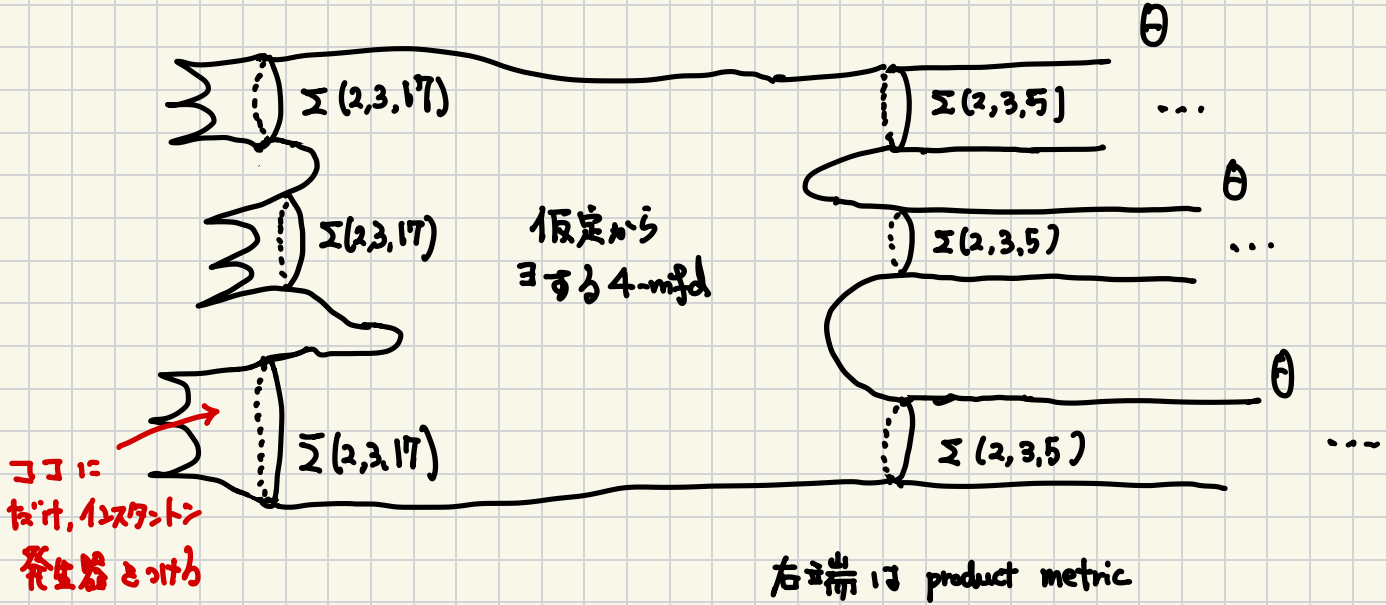
非線形波動発生器 とよぶ

インスタントン

③ 3次元 ホモロジー 同境群が 深いこと

例として　$-3[\Sigma(2,3,17)] + 3[\Sigma(2,3,5)] \neq 0$ in $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ と示す

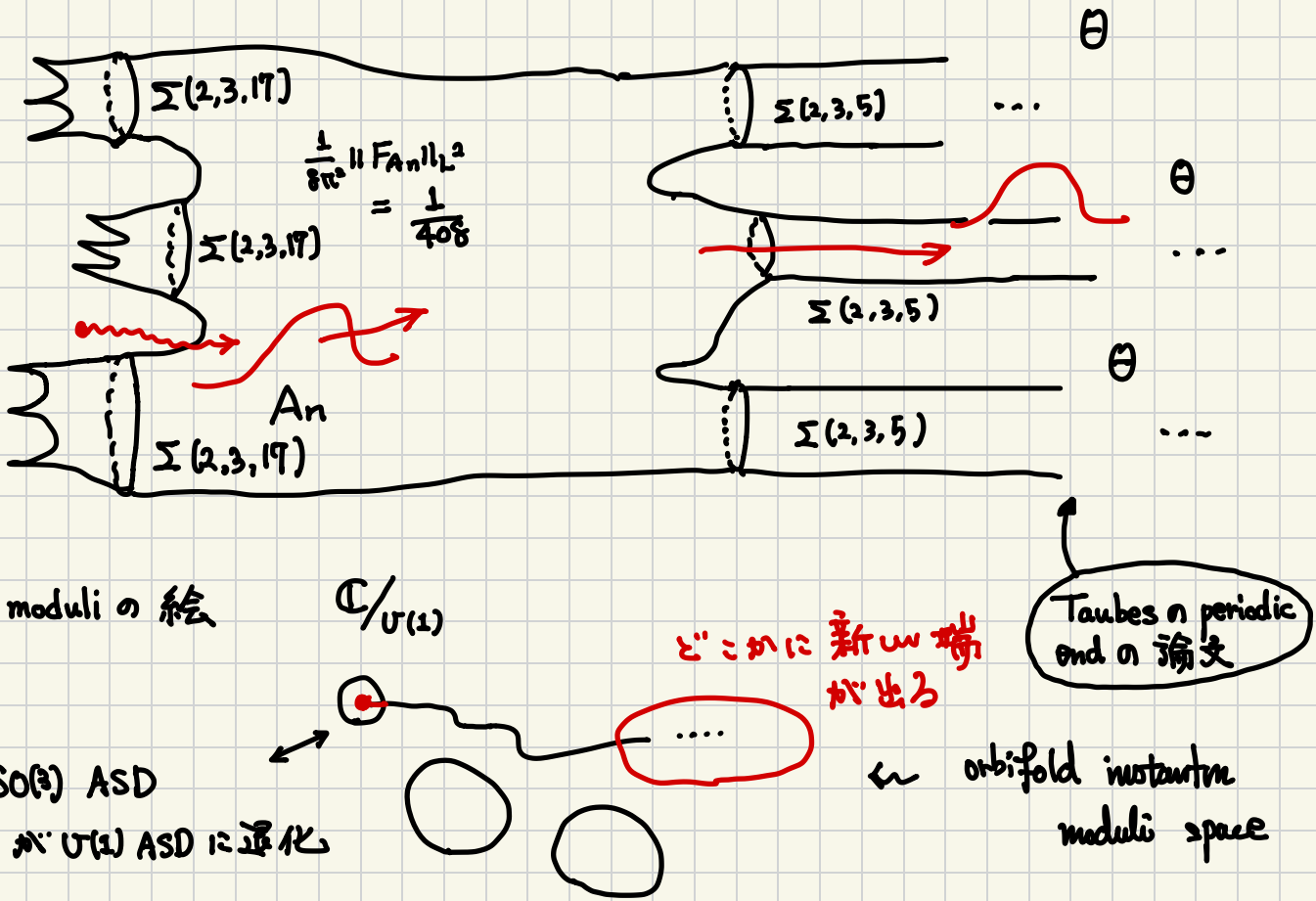
(今も SW, HF theory では示せない)



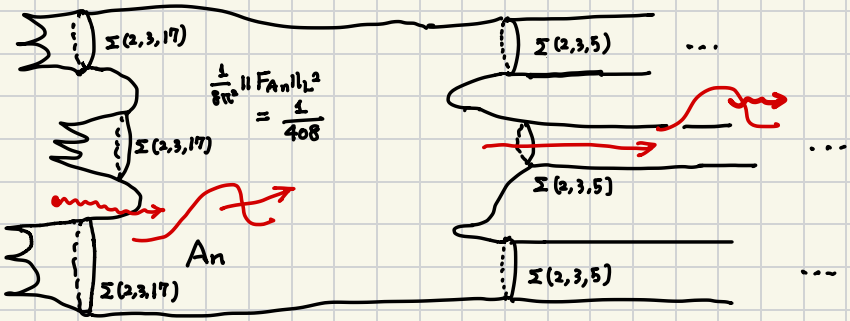
右端は product metric

この Riemann orbifold 上の上記の3 condition をつけた instanton moduli を考える

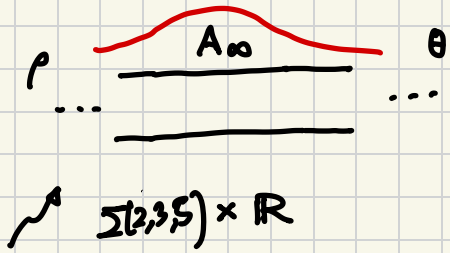
③ 3次元 ホモロジー 同境群が 深いこと



③ 3次元ホモロジー同境群が深いこと



インスタントンが分離され、もれでる



$$0 < cs(\rho) - \underset{\substack{\| \\ 0}}{cs(\theta)} = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\, F_{A_\infty}\wedge F_{A_\infty} = \frac{1}{8\pi^2}\|F_{A_\infty}\|_{L^2}^2 \le \frac{1}{408}$$

$$cs(a) = \frac{1}{8\pi^2}\int \mathrm{tr}\left(a\wedge da + \frac{2}{3}a^3\right)$$

$\rightsquigarrow$ $^\exists\rho$: $SU(2)$ flat conn on $\Sigma(2,3,5)$ s.t. $0 < cs(\rho) \le \frac{1}{408}$

一方で $\left\{\begin{array}{l}\Sigma(2,3,5)\text{ 上の} \\ SU(2)\text{ flat conn}\end{array}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の像は、

$\left\{0,\ \frac{1}{120},\ \frac{49}{120} \bmod \mathbb{Z}\right\}$ より矛盾 」

③ 3次元 ホモロジー 同境群が 深いこと

$\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ には knot 版もある

$\mathcal{C} := \{ \text{ori knots in } S^3 \} \Big/ \text{concordant} \quad K_0 \sim_c K_1$

$\Leftrightarrow$ def $\exists\, [0,1]\times S^1 \overset{C^\infty \text{ proper}}{\hookrightarrow} [0,1]\times S^3$ で ∂ が K_0, K_1

$\#$ $\rightsquigarrow$ abel group str $\quad 0 = [U_0]$

Thm (Endo, 1995)

$\mathbb{Z}^\infty \subset \mathcal{C}^{top} = \{ [K] \in \mathcal{C} \mid K \text{ は topological には } U_0 \text{ と concordant} \}$

$\Sigma_2 : \mathcal{C} \longrightarrow \Theta^3_{\mathbb{Z}_2}$: well-def hom

$[K] \mapsto [\Sigma_2(K)]$

Pretzel knots $\quad \Sigma_2(k_n) = \Sigma(p_n, q_n, r_n)$ $\rightsquigarrow$ Furuta's linear indep result

③ 3次元 ホモロジー同境群が深いこと



非線形波動発生器 + energy の最小化

$\mathbb{R}\times Y$ 上ある性質をみたす instanton の列 そのものと最小 energy

$\rightsquigarrow$ $r_0(Y) \in (0,\infty]$ Y : ori $\mathbb{Z}HS^3$

Nozaki - Sato - T, 2024

$r_0 : \Theta^3_{\mathbb{Z}} \to (0,\infty]$

Floer theory の言葉で一般化

$\mathbb{R}\times Y$ 上の product metric に対する fin energy moduli から
つくる ∞ dim Morse homology

(Daemi も 2020 に類似の inv $\Gamma_Y(n)$ を導入)

③ 3次元ホモロジー同境群が深いこと

Thm (Furuta, FS, 1990)

$$\mathbb{Z}^\infty \subset \Theta^3_{\mathbb{Z}} \quad \left(\text{gen by } \{\Sigma(p,q,pqn-1)\}_{n=1}^\infty\right)$$

$$\| \quad S^3_{-1/n}(T(p,q)^*)$$

↑ torus knot

Using $r_0(Y)$ & recent development of singular instanton theory.

Thm (NST + Daemi-Imori-Sato-Scaduto-T, 2025)

$K \subset S^3$

- quasi-positive knot $[K] \neq [U_0]$ or
- alternating knot K w/ $\sigma(K) < 0$

$\Rightarrow \{S^3_{1/n}(K)\}_n^\infty$ are linearly indep in $\Theta^3_{\mathbb{Z}}$

r_0-invariant の変種

① $K \subset S^3$ $\quad r_0^{\omega}(K) \in (0,\infty]$

$\omega \in (0,\frac{1}{2})$ Daemi-Imori-Sato-Scaduto-T, 2025

$r_0^{\omega} : \mathcal{C} \longrightarrow (0,\infty]$ ⇝ applications to knot concordance

計算には同変 ADHM を使う

② Y: ori $\mathbb{Z}HS^3$ $\quad f : Y \to Y$: ori pres diffeo

$r_0(Y,f) \in (0,\infty]$ Alfieli-Dai-Mallic-T, 2026

⇝ contractible cpt exotic 4-mfd, cork theory

③ $K \subset S^3$: knot $\quad \tau : (S^3,K) \circlearrowleft$: strong inversion

$r_0(K,\tau) \in (0,\infty]$ Dai-Mallic-T, 2026 preprint

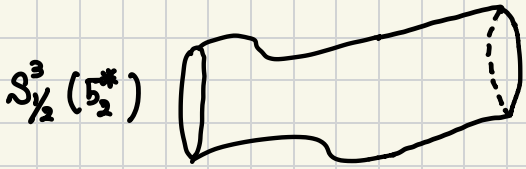
⇝ D^4 内の D^2 exotic emb の detect

③ 3次元 ホモロジー 同境群が深いこと

最近の進展

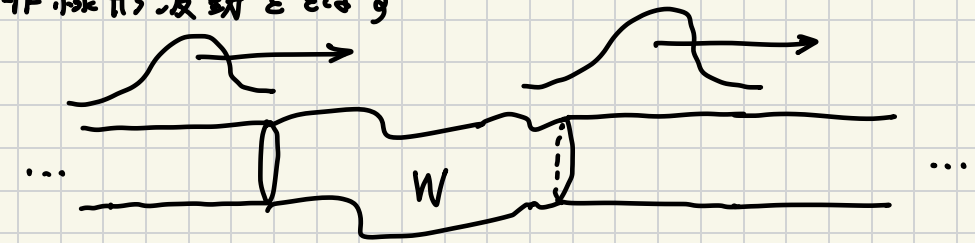
Thm (Mares-Nozaki-T, 2026)

$\Theta^3_{\mathbb{Z}}$ は graph $\mathbb{Z}HS^3$ で生成できない



Y = linear combination of graph $\mathbb{Z}HS^3$'s

非線形波動 とばす



右にとんでいった後, W上に energy = 0 の instanton = flat conn がのこる. この表現 と Galois conjugate する

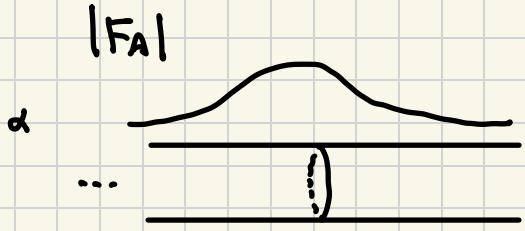
④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

$X = \mathbb{R} \times Y$　g : product metric　P = product $SU(2)$ bdl

$$\mathcal{M}_{(X,g)}(P) = \bigcup_{\alpha,\beta : \text{flat conn's on } Y} \mathcal{M}_Y(\alpha,\beta)$$

fin energy

左端で α, 右端で β に漸近する instantons



$\longleftrightarrow$ Y 上の Chern-Simons functional

$$\mathcal{A}_{P|_Y} = \{\text{conn's on } P|_Y\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{on } L^2\text{-grad flow}$$

$$\| \qquad\qquad \cup \qquad\qquad \cup$$

$$\Omega^1_Y \otimes \mathfrak{su}(2) \ni a \longmapsto \frac{1}{8\pi^2}\int_Y \mathrm{tr}\left(a da + \frac{2}{3}a^3\right)$$

Morse theory として定式化 $\rightsquigarrow$ $I_*(Y)$: instanton Floer 1987

④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

Y: ori $\mathbb{Z}HS^3$ $\quad P = Y \times SU(2)$

$$\{\text{conn's on } P\} = \mathcal{A}_P \leftarrow \mathcal{G}_P \quad : \text{not free}$$

$$\{g \in \mathrm{Aut} \mid g(y_0) = \mathrm{id}\} = \mathrm{Aut}^0 P \subset \mathrm{Aut}\, P$$

$$\mathcal{A}_P/\mathrm{Aut}^0 P \xrightarrow{CS} \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightsquigarrow \text{regarded as Morse-Bott theory}$$

$SO(3)$ が作用

$$C_*^{MB}(Y) = C_*(\mathrm{Crit}(CS))$$

(Austin-Braam 1995, Miller 2026)

$C_*(SO(3))$ $\quad$ bar construction $\quad H_*(BSO(3)) \curvearrowright I_*^{SO(3)}(Y)$

これが豊かであればあるほど、4D topology の新しい情報が分かる

高尾山の山頂にて

$$\mathcal{A}_P/\mathrm{Aut}^0 P \times_{SO(3)} ESO(3) \xrightarrow{CS} S^1 \text{ の Morse theory}$$

④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

古田先生の考えた setting ⇒ $H^*(\mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P^\circ;\mathbb{Z})$ の $H^*(BSO(3))$ から来ない class $a \in H^*(\mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P^\circ;\mathbb{Z})$ に対してどう理論展開されるか！

$a = e(E)$ $\quad E \longrightarrow \mathcal{A}_P/\mathcal{G}_P^\circ$: vector bdl

$S(E)$: sphere bdl

$S(E)$ の Morse complex $\longleftrightarrow$ $C^*_{MB}(Y)$ の $e(E)$-valuation による mapping cone

$$C^*_{MB}(Y) \oplus C^*_{MB}(Y)[\text{shift}]$$

$$\begin{pmatrix} \partial & e(E) \\ 0 & \pm\partial \end{pmatrix}$$

(Fukaya-Floer type の考察)

④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

$C^*_{MB}(Y)$ の $e(E)$-valuation による
mapping cone

$$C^*_{MB}(Y) \oplus C^*_{MB}(Y)[\text{shift}]$$

$$\begin{pmatrix} \partial & e(E) \\ 0 & \pm\partial \end{pmatrix}$$

(Fukaya-Floer-type の考察)

$e(E)$ Σ-形式の a に

$\rightsquigarrow$ $I^{(a)}_*(Y)$: a-twisted
次元 instanton Floer

ゲージ群を mapping degree 0 に限る

$\rightarrow$ $u_0, u_1 \in H^*(\mathcal{A}^p/\mathcal{G}_p ; \mathbb{Z}_2)$

spin Dirac index に関わる。

Donaldson の thm B, C の 4-mfd w/ ∂ に (Fukaya-Furuta-Ohta)

④ 無限次元の Morse theory に対する洞察

Thm (Donaldson, thm B. C)

X : spin $\pi_1 = \{e\}$ closed smooth 4-mfd.

I の固有値の数 $= 1, 2 \Rightarrow I_X \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ or $2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

(I は X の交叉形式)

$\mathcal{U}_0$ を使った w/ ∂ version ⇝ Sasahira 2013」

Thm (Sasahira 2013, relative thm B)

X : spin $\pi_1 = \{e\}$ cpt smooth 4-mfd. w/ $\partial = \sharp HS^3$ Y

$b^+ = 1$, $I_2^{(0)}(Y) = 0 \Rightarrow I_X \cong \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Sasahira ; spin^c variant 2008, 2013」

$L(p,q)^{\#} \hookrightarrow \mathbb{CP}^2$

⑥ その他の発展

(I) Furuta - Steer (1992)

Y : Seifert $\mathbb{Z}HS^3$ $\quad \mathrm{Hom}(\pi_1(Y), SU(2))^{irr}/SU(2)$: smooth cpt Kähler simply conn

$\rightsquigarrow$ instanton Floer の計算」 $\quad \mathrm{supp}\, H_* : \text{even}$

(II) Furuta - Ohta invariant (1993, Furuta - Ohta)

closed ori 4-mfd X, $\quad H_*(X;\mathbb{Z}) \cong H_*(S^1 \times S^3;\mathbb{Z})$

$H_*(\tilde{X};\mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{R}\times S^3;\mathbb{Z})$

$$\lambda_{FO}(X) := \frac{1}{4}\#\left(k=0 \text{ irr instanton moduli}\right)$$

Mrowka - Ruberman - Saveliev 2011

[Conj $\quad -\lambda_{FO}(X) = \lambda_{MRS}(X)$ ← Seiberg-Witten counter part

古田先生の残した思想

① Yang-Mills ゲージ理論 ∈ "non linear Fredholm theory"

② (局所)群作用の固定 instanton から豊かな幾何が現れる

③ 3次元ホモロジー同境群が深いこと

④ 無限次元の Morse theory に対する洞察