Seiberg-Witten理論と
その4次元トポロジーへの応用

今野 北斗 (東大数理)

2026/11/8

古田幹雄先生追悼研究集会「11月8日の幾何」

Seiberg-Witten方程式の到来

DonaldsonによるYang-Millsゲージ理論を用いた4次元トポロジーにおける革命から10年以上経った1994年に，WittenがSeiberg-Witten方程式を導入．数学におけるゲージ理論の新たな革命がはじまった．

Seiberg-Witten方程式（SW方程式）：

Seiberg-Witten方程式は，次のような形の（ゲージ変換も込めると楕円型の）非線形偏微分方程式：

$$\begin{cases} F_A^+ = \sigma(\Phi, \Phi), \\ D_A\Phi = 0 \end{cases}$$

Seiberg-Witten方程式に基づき，Donaldson不変量の類似として，可微分閉4次元多様体の不変量であるSeiberg-Witten不変量が定義された．これが現在最も良く使われる可微分閉4次元多様体のゲージ理論的不変量．Donaldson不変量に比べると計算が容易（とはいえ，限られたタイプの4次元多様体以外には，現在でも計算は難しい．）
1994年以降，低次元トポロジーにおけるゲージ理論は，Donaldson理論とSW理論に分かれる．

Seiberg-Witten理論の利点

Yang-Millsゲージ理論と比較したとき，SW理論にはいくつかの決定的な利点があった：

Seiberg-Witten理論の利点:

- 最大の利点は，モジュライ空間が常にコンパクトになること．Donaldson理論において最も大変であった技術的問題のひとつが無くなる．
- シンプレクティック構造などの幾何構造との関係が明瞭（Taubes）

（※ただし最近では，閉4次元多様体から境界付き4次元多様体・3次元多様体・結び目に対象を広げることで，Yang-Mills理論の巻き返しも大きい．Kronheimer, Mrowka, Daemi, Scaduto, Miller-Eismeier, Taniguchi, Imori…）

1994: Seiberg-Witten year

それまでに10年以上続いたDonaldson理論時代のゲージ理論的技術の蓄積のためか,
Seiberg-Witten方程式が一度認知された後は，猛烈な勢いで研究が進む.

1994年末の狂騒（or 競争）：

- 10月5-6日：Wittenが現在Seiberg-Witten方程式と呼ばれるものをMITで講演．数学者の間にSW方程式の噂が広まる.
- 11月9日：Kronheimer-Mrowkaが長年の未解決問題だったThom予想（$\mathbb{CP}^2$の中の曲面に対する最小種数問題）をSW方程式を用いて解決する論文をジャーナルに投稿．ほぼ同時にMorgan-Szabó-Taubesも同様の結果を発表．（Kronheimer（の冗談）：「時差のおかげで我々の方が早かった．」）
- 11月14日：Taubesがシンプレクティック多様体に対してSW不変量の非自明性を示す論文をジャーナルに投稿．Kähler曲面に対するDonaldson不変量の非自明性の遙かな拡張.
- 11月15日：WittenがSW方程式を明示的に書いたプレプリントをarXivに投稿.

Mrowka曰く「あの頃は毎週定理を証明していた」

1994: Seiberg-Witten year

Kronheimerの講演:

- 1994年12月：Kronheimerがケンブリッジ大学でSW理論の一週間に亘る連続講演を行う.
- SW方程式は4次元多様体のspin^{c}構造に依存する．spin構造から来るspin^{c}構造を考えると，SW方程式に $\mathrm{Pin}(2) = S^1 \cup jS^1$ ($\subset \mathbb{C} \oplus j\mathbb{C} = \mathbb{H}$) の対称性があることがKronheimerの講演で示唆される．Kronheimerは講演中に，この対称性を用いることで，スピン4次元多様体への制約が得られる可能性に言及したと思われる．（現在の視点で整理すると，Donaldson's Theorems B, Cと呼ばれるもののSW理論による別証明．）

古田先生は，1995年初頭に有限次元近似のアイデアを導入し，$\mathrm{Pin}(2)$対称性と合わせることで，上の制約を遥かに一般化した可微分スピン4次元多様体への決定的な制約を得た．これが10/8不等式と呼ばれるもので，SW理論の4次元トポロジーへの最大の応用のひとつに数えられる．これを説明するために松本幸夫先生の11/8予想を振り返る.

11/8予想

11/8予想 (松本幸夫 (1982)):

Xを向きづけられたスピン可微分4次元閉多様体とする．このとき

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|$$

が成立するであろう．ここで$\sigma(X)$はXの符号数.





この不等式は$K3$曲面の任意個の連結和に対して等号達成している．$K3$の交叉形式は

$2(-E_8) \oplus 3H$, ただし$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$だった．11/8予想は，交叉形式が$K3$曲面の連結和のそれと同じようなスピン可微分4次元多様体に対しては，可微分な範囲でどんな手術をしても交叉形式からHを減らせないであろうと言っている．（Hを増やすことは$S^2 \times S^2$の連結和で実現できるので，減らせるかのみが本質的な問い．）一方でFreedman理論から，（単連結ならば）位相的な範疇では「Hの切り取り」は常にできる.

11/8予想

11/8予想 (松本幸夫 (1982)):
Xを向きづけられたスピン可微分4次元閉多様体とする．このとき

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|$$

が成立するであろう．ここで$\sigma(X)$はXの符号数.

さらにFreedman理論およびDonaldsonの対角化定理から次が容易に分かる：

定理: X を単連結な可微分4次元閉多様体とする．もし11/8予想が正しければ，
X は $\mathbb{CP}^2$, $S^2 \times S^2$, $K3$ またはこれらの逆向きいくつかの連結和と同相である.

すなわち，11/8予想は，単連結可微分4次元多様体の位相的分類のための最後のピースである．（注：4次元可微分Poincaré予想が未解決なことからも分かる通り，4次元多様体の可微分分類は未だ絶望的．）

10/8不等式

11/8予想 (松本幸夫 (1982)):

Xを向きづけられたスピン可微分4次元閉多様体とする．このとき

$$b_2(X) \geq \frac{11}{8}|\sigma(X)|$$

が成立するであろう．ここで$\sigma(X)$はXの符号数.

古田先生は，この予想に肉薄する結果を証明した．それが，古田先生の仕事のひとつのハイライトをなす10/8不等式：

10/8不等式 (古田幹雄 (1995)):

X が向きづけられたスピン可微分4次元閉多様体で交叉形式が不定値とすると,

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\sigma(X)| + 2$$

が成立する.

10/8不等式

10/8不等式 (古田幹雄 (1995)):

X が向きづけられたスピン可微分4次元閉多様体で交叉形式が不定値とすると,

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\sigma(X)| + 2$$

が成立する.

この不等式は（“+2”のおかげで）$K3$に対して等号達成している. $K3$の多くの連結和を考えると次第に11/8予想の不等式から遠くなるが, 「スピン可微分4次元多様体の交叉形式の中で, E_8成分に対してHをどれだけ減らせるか」を定量的に評価している.

一方で, 位相的（かつ単連結）な範囲ではそのようなE_8とHの個数の「比」に対する制約は全く存在せず, Freedman理論によりどんな組み合わせも実現できてしまう.

今日でも可微分4次元多様体の交叉形式に対する制約は以下のもの（とその変種）がほぼ全て：

（1）Rokhlinの定理（ゲージ理論以前の古典的制約）

（2）Donaldsonの対角化定理

（3）古田先生の10/8不等式

10/8不等式

10/8不等式 (古田幹雄 (1995)):

X が向きづけられたスピン可微分4次元閉多様体で交叉形式が不定値とすると,

$$b_2(X) \geq \frac{5}{4}|\sigma(X)| + 2$$

が成立する.

論文は2001年の出版だが, 実際に証明されアナウンスされたのは1995年3月.

Mathematical Research Letters **8**, 279–291 (2001)

MONOPOLE EQUATION AND THE $\frac{11}{8}$-CONJECTURE

M. FURUTA

1. Introduction

Let M be a 4-dimensional oriented closed spin manifold. We write $b_l(M)$ for the l-th Betti number of M and $\mathrm{sign}(M)$ for the signature of M. In [13] Y. Matsumoto conjectured the following inequality.

Conjecture. $$b_2(M) \geq \frac{11}{8}|\mathrm{sign}(M)|.$$

This conjecture is now known as *the 11/8 conjecture*. Since the K3 surface satisfies the equality, the coefficient $11/8$ cannot be replaced by a larger number. In this paper we show a weaker inequality.

Theorem 1. *If the intersection form of M is not definite, the following inequality is satisfied.*

$$b_2(M) \geq \frac{5}{4}|\mathrm{sign}(M)| + 2.$$

10/8不等式

論文は2001年の出版だが，実際に証明されアナウンスされたのは1995年3月.

古田先生曰く，1995年3月のイタリア，TriesteにあるICTPでの研究集会に向かう途中の飛行機の中で証明が完成したとのこと.
左や下はその講演記録．できたての10/8不等式を講演している．（1995年3月17日）

INTERNATIONAL ATOMIC ENERGY AGENCY
UNITED NATIONS EDUCATIONAL, SCIENTIFIC AND CULTURAL ORGANIZATION
INTERNATIONAL CENTRE FOR THEORETICAL PHYSICS
I.C.T.P., P.O. BOX 586, 34100 TRIESTE, ITALY, CABLE CENTRATOM TRIESTE

SMR.847/5

CONFERENCE ON
TOPOLOGICAL AND GEOMETRICAL PROBLEMS
RELATED TO QUANTUM FIELD THEORY
(13 - 24 March 1995)

An invariant of Spin 4-manifolds
and
the 11/8-conjecture

M. FURUTA
Department of Mathematics
University of Tokyo
7-3-1 Hongo
Bunkyo-ku
113 Tokyo
Japan

17 March 1995 1

An Invariant of Spin 4-manifolds
and
the 11/8 - conjecture

M. FURUTA

X : a closed spin 4-manifold

10/8不等式の証明：有限次元近似

10/8不等式の証明は，ある意味でその結果以上に巨大な影響をゲージ理論と低次元トポロジーに与えた．先に紹介したアメリカでの活発な研究から遠く離れたところで古田先生が独自に編み出したのが，SW方程式の**有限次元近似**という画期的なアイデア．

有限次元近似: SW方程式を，二つのHilbert空間の間の非線形写像 $F : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ とみなす．すなわち，$F^{-1}(0)$がSW方程式の解のモジュライ空間となるように写像 F を定義する．古田先生は，SW方程式のモジュライ空間のコンパクト性を用いて，F が良い「有限次元近似」を持つことを示した．

具体的には：有限次元部分空間 $W \subset \mathscr{W}$ を十分大きく取る．F を微分して得られる線型Fredholm写像 $L = dF_0 : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ を使って $V = L^{-1}(W)$ とおく．F に V への制限と W への射影を合成した $f : V \to W$ を$F : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$の有限次元近似とみなしたい．

10/8不等式の証明：有限次元近似

具体的には：有限次元部分空間 $W \subset \mathscr{W}$ を十分大きく取る．F を微分して得られる線型Fredholm写像 $L = dF_0 : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ を使って $V = L^{-1}(W)$ とおく．F に V への制限と W への射影を合成した $f : V \to W$ を$F : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$の有限次元近似とみなしたい．

W を十分大きく取る（近似の精度を十分良くする）と，1点コンパクト化として得られる有限次元球面の間の連続非線型写像

$$f : V^+ \to W^+$$

が誘導される（連続に拡張できることにモジュライのコンパクト性が使われる）．

VとWの次元の差 $\dim V - \dim W$ は指数定理で計算される．指数定理は，（線型Fredholm写像 $L = dF_0 : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ で無限次元をキャンセルして得られる）「無限次元空間$\mathscr{V}, \mathscr{W}$の次元の差 “$\dim \mathscr{V} - \dim \mathscr{W}$”」に相当する有限次元の量を，計算している．

非線型Fredholm写像 $F : \mathscr{V} \to \mathscr{W}$ を近似して得られる $f : V^+ \to W^+$ という有限次元空間の間の非線型写像は，この指数定理の構造の直接的な非線型化と思える．

10/8不等式の証明：有限次元近似

同変K理論の適用: この $f\colon V^+ \to W^+$ は，（スピンな場合の）SW方程式のPin(2)対称性に由来し，V, W へのあるPin(2)作用に関して同変になる．このようにして得られた表現球面の間の同変写像の存在が，V, W のPin(2)表現のタイプごとの次元の差に制約を与えることを古田先生は示した（一種のBorsuk-Ulam定理）．証明は同変K理論 $K_{\mathrm{Pin}(2)}$ を有限次元近似 f に適用することでなされる．（このような代数トポロジーの道具が有効に使えるのは，有限次元近似が取れたためなことに注意．）

この表現ごとの次元の差（指数定理で計算される）の不等式を整理すると，10/8不等式になる．

この仕事を契機に，代数的トポロジーをSW方程式の有限次元近似に本格的に応用する流れが生まれ，現在まで続いている．（Furuta-Kametani, Furuta-Kametani-Minami, Furuta-Kametani-Matsue, Schmidt, Manolescu, Lin, Hopkins-Lin-Shi-Xu, Dai-Sasahira-Stoffregen, Hakamada…）

10/8不等式の証明：有限次元近似

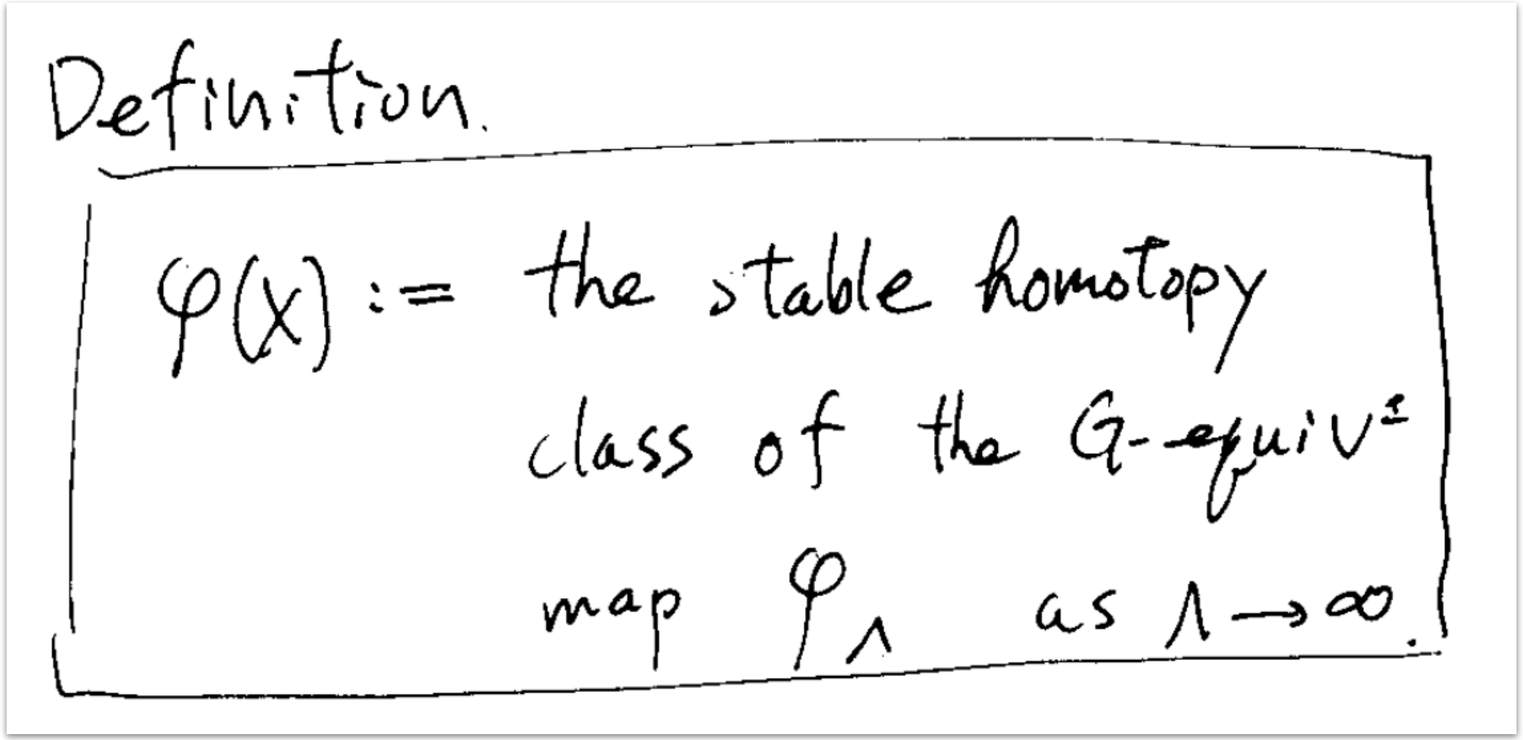
この表現ごとの次元の差（指数定理で計算される）の不等式を整理すると，10/8不等式になる.

この仕事を契機に，代数的トポロジーをSW方程式の有限次元近似に本格的に応用する流れが生まれ，現在まで続いている．（Furuta-Kametani, Furuta-Kametani-Minami, Furuta-Kametani-Matsue, Schmidt, Manolescu, Lin, Hopkins-Lin-Shi-Xu, Dai-Sasahira-Stoffregen, Hakamada…）

・次のトピックに行く前に（10/8の初期の変種）：orbifold版の10/8も，後に述べるManolescuの仕事に先立ち，境界付き4次元多様体に対する10/8的な情報を捉えた（Fukumoto-Furutaのw-不変量）．境界付きスピン4次元多様体 W^4 にスピンorbifoldで蓋をして，閉スピン4次元orbifoldに拡張した10/8を適用することで，Wの交叉形式に制約をかける（∂W という3次元多様体がどのような可微分スピン4次元多様体の境界になるかへの制約ともみなせる．）

有限次元近似から4次元多様体の不変量へ

古田先生は1995年3月のTriesteの集会で既に，SW方程式の有限次元近似から可微分4次元閉多様体の不変量が取り出せることに言及している.



すなわち，有限次元近似 f の適当な安定ホモトピー類が，SW方程式を立式している4次元多様体の不変量になるという観察をしている.

有限次元近似から4次元多様体の不変量へ

古田先生は1995年3月のTriesteの集会で既に，SW方程式の有限次元近似から可微分4次元閉多様体の不変量が取り出せることに言及している.

すなわち，有限次元近似 f の適当な安定ホモトピー類が，SW方程式を立式している4次元多様体の不変量になるという観察をしている.

これが今日Bauer-Furuta不変量と呼ばれる不変量の原型．古田先生の10/8の仕事の後に，それを受けて独立に同様の不変量をまとめたBauerとの共著（2004年出版）となる.

Bauer-Furuta不変量 $f\colon V^+ \to W^+$ は球面間の（安定）写像（のホモトピー類）だが，その「写像度」を取るとSeiberg-Witten不変量が復元される.

Invent. math. 155, 1–19 (2004)
DOI: 10.1007/s00222-003-0288-5

Inventiones mathematicae

A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: I

Stefan Bauer[1], **Mikio Furuta**[2]

[1] Fakultät für Mathematik, Universität Bielefeld, PF 100131, 33501 Bielefeld, Germany (e-mail: bauer@mathematik.uni-bielefeld.de)
[2] Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, Tokyo 153-8914, Japan (e-mail: furuta@ms.u-tokyo.ac.jp)

Oblatum 4-X-2001 & 16-XII-2002
Published online: 26 September 2003 – © Springer-Verlag 2003

Abstract. The monopole map defines an element in an equivariant stable cohomotopy group refining the Seiberg-Witten invariant. Part I discusses the definition of this stable homotopy invariant and its relation to the integer valued Seiberg-Witten invariants.

1. Introduction

In the year 1994, Nathan Seiberg and Edward Witten found new differential

Bauer-Furuta不変量

Seiberg-Witten不変量と比較したときのBauer-Furuta不変量の利点:

1. 球面間の写像 $f\colon V^+ \to W^+$ の安定ホモトピー類は，モジュライ空間の数え上げ（= 「f の写像度」）による数値的な不変量を超えた情報を持つ.
2. 横断正則性に関わる問題がなくなり，不変量の定義で摂動を取る必要がなくなる．同変版を圧倒的に考えやすくなる.

1．は具体的には適当な連結和として得られる4次元多様体に適用できる（Bauerの連結和公式）．例えば $K3\#K3$ がエキゾチック構造を持つことが示せる.

ポイントは，$K3\#K3$ のBauer-Furuta不変量は（$V - W$ のstable framingを固定すると）$\pi_2^s \cong \mathbb{Z}/2$ の生成元，すなわち Hopf写像 $\eta : S^3 \to S^2$ の自乗で，非自明となること.

他のゲージ理論的不変量（Donaldson不変量，SW不変量）はこのような連結和に対して消滅しており，エキゾチック構造の検出は不可能．BF不変量はSW不変量（やそれと等価と予想されるDonaldson不変量）よりも真に強い不変量になっており，現在閉4次元多様体のゲージ理論的不変量の中で，（マイルドな仮定の下で）最も情報量が多い.

Bauer-Furuta不変量

Seiberg-Witten不変量と比較したときのBauer-Furuta不変量の利点:

1. 球面間の写像 $f\colon V^+ \to W^+$ の安定ホモトピー類は，モジュライ空間の数え上げ（= 「f の写像度」）による数値的な不変量を超えた情報を持つ.
2. 横断正則性に関わる問題がなくなり，不変量の定義で摂動を取る必要がなくなる．同変版を圧倒的に考えやすくなる.

2. のおかげで，様々な形で群作用を取り込んだSW理論の建設がスムーズにできる．この流れは（後に述べるFloerホモトピー型による境界付き4次元多様体への拡張とも合わせて）今に至るまで続いており，同変SW理論やReal SW理論と呼ばれるものの最近の隆盛に大きく貢献している．(Bryan, Nakamura, Y. Kato, Baraglia-Hekmati, Konno-Miyazawa-Taniguchi, Montague, Konno, Miyazawa, Kang-Park-Taniguchi, Iida-Taniguchi, Fukumoto-Taniguchi…) これらは，4次元多様体上の群作用，結び目理論，4次元多様体内への曲面埋め込みに対して強力な応用を持っており，現在もSW理論の中の重要なトピックとして急速に発展している.

Bauer-Furuta不変量

Seiberg-Witten不変量と比較したときのBauer-Furuta不変量の利点:

1. 球面間の写像 $f\colon V^+ \to W^+$ の安定ホモトピー類は，モジュライ空間の数え上げ（= 「f の写像度」）による数値的な不変量を超えた情報を持つ.
2. 横断正則性に関わる問題がなくなり，不変量の定義で摂動を取る必要がなくなる．同変版を圧倒的に考えやすくなる.

（すぐ後で説明する）Bauer-Furuta不変量の3次元版にあたるManolescuの仕事についてのMrowkaのコメント：

“Ciprian (Manolescu) created a simple, less technical way to define this Floer homology, and because it’s less technical, it allows you to become more creative.”

（Quanta Magazine, 2015から引用）

このコメントはSW不変量 vs. BF不変量の対比にもそのまま当てはまる.

煩雑な技術的障壁が無くなった分，大胆に先に進める！

その後の展開：SW Floer安定ホモトピー型

閉4次元多様体の不変量であるBauer-Furuta不変量が定義された後，その3次元版を定義せよ，という問題が重要だった（古田先生ご自身も講演等で言及）．

SWF安定ホモトピー型 (Manolescu (2001)):

この問題はManolescuが解決する．彼は，Seiberg-Witten Floer安定ホモトピー型と呼ばれる3次元多様体の不変量を（$b_1 = 0$の仮定の下）構成した．これがBauer-Furuta不変量の3次元版．これを用いて境界付きの4次元多様体にBauer-Furuta不変量の定義が拡張され（相対Bauer-Furuta不変量），Bauer-Furuta不変量の3次元多様体に沿った切り貼り（Taubes式のgluing）ができるようになった．

	モジュライ空間の数え上げで定義される不変量	安定ホモトピー的な精密化
4次元	Seiberg-Witten不変量	Bauer-Furuta不変量
3次元	モノポールFloerホモロジー（Kronheimer-Mrowka）	SWF安定ホモトピー型

その後の展開：SW Floer安定ホモトピー型

SWF安定ホモトピー型が定義されてしばらく経った2013年に，Manolescuがこの道具を使って次の歴史的な結果を得る：

三角形分割予想の否定的解決 (Manolescu (2013)):
5次元以上の任意の次元で，三角形分割ができない位相多様体が存在する.

前提として，高次元の問題を3次元ホモロジー同境群の問題に帰着させる1970年代後半の松本堯生先生・Galewski-Sternの独立の仕事があった．Manolescuは，この帰着されたホモロジー同境群に関する問題を，SWF安定ホモトピー型を用いて解決した.

証明ではPin(2)同変版のSWF安定ホモトピー型を用いる．ここでも安定ホモトピー版の理論では同変性を取り込むのが容易なことが効いている．（後にF. LinによりPin(2)同変版のモノポールFloerホモロジーが作られたが，技術的にずっと大変．）

このように，トポロジーの最大の未解決問題のひとつの解決まで，古田先生の仕事はダイレクトに繋がっている.

その後の展開：SW Floer安定ホモトピー型

SWF安定ホモトピー型が定義されてしばらく経った2013年に，Manolescuがこの道具を使って次の歴史的な結果を得る：

三角形分割予想の否定的解決 (Manolescu (2013)):
5次元以上の任意の次元で，三角形分割ができない位相多様体が存在する．

Manolescuのこの仕事以降，SWF安定ホモトピー型・相対Bauer-Furuta不変量の研究は現在に至るまで極めて活発に続いている．境界付き4次元多様体，3次元多様体，結び目の研究で基本的な道具のひとつとなりつつある．理論の基礎の整備も進んでいる（Khandhawit-Lin-Sasahira, Sasahira-Stoffregen, Dai-Sasahira-Stoffregen…）

最近の展開の一つ：族のBauer-Furuta不変量

最後に私自身に近い話題を紹介させていただく.

<u>（復習）Seiberg-Witten不変量と比較したときのBauer-Furuta不変量の利点:</u>

1. 球面間の写像 $f\colon V^+ \to W^+$ の安定ホモトピー類は，モジュライ空間の数え上げ（= 「f の写像度」）による数値的な不変量を超えた情報を持つ.
2. 横断正則性に関わる問題がなくなり，不変量の定義で摂動を取る必要がなくなる．同変版を圧倒的に考えやすくなる.

1. の族版を考えたい．すなわち，数値的な族のSeiberg-Witten不変量を真に超えた情報であるはずの族のBauer-Furuta不変量を活かした応用があることを述べたい.

最近の展開の一つ：族のBauer-Furuta不変量

（復習）Seiberg-Witten不変量と比較したときのBauer-Furuta不変量の利点:

1. 球面間の写像 $f\colon V^+ \to W^+$ の安定ホモトピー類は，モジュライ空間の数え上げ（= 「f の写像度」）による数値的な不変量を超えた情報を持つ.
2. 横断正則性に関わる問題がなくなり，不変量の定義で摂動を取る必要がなくなる．同変版を圧倒的に考えやすくなる.

1．の利点が活きてくる典型例は，$K3\#K3$ のような連結和だった.

逆に，4次元トポロジーで典型的な研究対象となる既約な4次元多様体（非自明な連結和分解を持たない多様体，例えばminimalなシンプレクティック4次元多様体）を考える．知られている全ての既約4次元多様体に対しては，（典型的な$spin^c$構造に対しては）BF不変量がSW不変量を超える状況はないことがすぐ分かる．（大雑把に言うと，「同じ次元の向き付けられた閉多様体から球面への写像のホモトピー類は写像度で決まる」ため．）

既約な4次元多様体に対してBauer-Furuta不変量が活きる状況は無いのだろうか？

最近の展開の一つ：族のBauer-Furuta不変量

既約な4次元多様体に対してBauer-Furuta不変量が活きる状況は無いのだろうか？

4次元多様体の族を考えると，実際にそのような状況が発生する！（族の底空間の次元の分，球面の間の次元がずれて，「同じ次元の間の写像」でなくなるのがポイント．）

定理 (Baraglia-Konno (2024)):
既約な4次元多様体（具体的には適当な楕円曲面）で，エキゾチックな微分同相を持つものが存在する．

ここで微分同相 $\varphi : X \to X$ が エキゾチック微分同相とは，φ が位相的には恒等写像にアイソトピックだが滑らかにはそうでないときをいう．上のような微分同相の例の存在は，長い間未解決だった．

証明は族版のBF不変量を使う（直感的には「Hopf写像 $\eta : S^3 \to S^2$ のS^1上の族」が現れるが，framingが捻れるのがポイント）．モジュライ空間の次元の関係で，他のゲージ理論的手法（例：族のSeiberg-Witten不変量）による証明は現時点では期待できない．

最近の展開の一つ：族のBauer-Furuta不変量

定理 (Baraglia-Konno (2024)):
既約な4次元多様体（具体的には適当な楕円曲面）で，　エキゾチックな微分同相を持つものが存在する.

これ以降，族のBauer-Furuta不変量を道具として既約4次元多様体上のエキゾチック微分同相の他の例も見つかり，それを用いて新しい重要な応用も生まれた：

Konno-Lin-Mukherjee-Muñoz-Echániz (2025)：Donaldsonによるシンプレクティックトレリ群の生成系に関する問の否定的解決.　（具体的には，Lagrangian球面に沿うDehn–Seidel twistの自乗で生成されるか，という問.　）

既約な4次元多様体が扱えるようになったので，シンプレクティック構造などの構造の問題が考えられるようになった.

最近の展開の一つ：族のBauer-Furuta不変量

これ以降，族のBauer-Furuta不変量を道具として既約4次元多様体上のエキゾチック微分同相の他の例も見つかり，それを用いて新しい重要な応用も生まれた：

Konno (2026) ：境界の近傍が標準的に同一視された同相な4次元多様体の組 X_1, X_2 であって次を満たすものが存在する：境界付近の共通した微分同相（境界に沿ったDehn twist）の相対アイソトピー類の非自明性が，X_1, X_2 の可微分構造を見分ける.

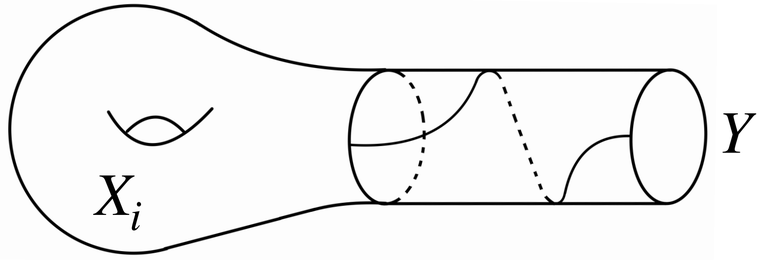
「エキゾチック微分同相によるエキゾチック構造の検出」

例：楕円曲面の重要な余次元0部分多様体,

Gompf核 $X_1 = N(n),\ X_2 = N(n)_{p,q}$（ただし$n \equiv 0 \bmod 4$）.

境界Dehn twistの自明性が $N(n)$ を$N(n)_{p,q}$の中で特徴づける.

（$N(n)$と同相な$N(n)_{p,q}$で境界に沿ったDehn twistの相対写像類が自明なものは $N(n)$ **のみ**と分かる！）



まとめ：SW理論における古田先生の数学とその展開

今日触れることができた10/8不等式以降の展開を見るだけでも，その研究から様々な数学が生まれたことが分かる．新しい分野を興したとも言えるし，分野を軽やかに跨ぐ自然で基本的な考え方を確立したとも言える．



- ゲージ理論と安定ホモトピー論の手法の融合
- Bauer-Furuta不変量による新たなエキゾチック構造の検出
- 同変版，Real版などの群作用を取り込んだ応用．結び目，4次元への曲面埋め込みへの膨大な応用
- 3次元のFloer理論における安定ホモトピー版の出現，三角形分割予想の否定的解決
- 族に対する応用．シンプレクティック幾何・微分同相群とエキゾチック構造の関係

上の多様なトピックのいくつかは，毎年大きな進展がいくつもある．
古田先生が10/8不等式で切り開いた新たな数学は，今日も広がり，深化を続けている．

古田幹雄先生，どうもありがとうございました．