# 有限次元近似, 指数定理, 10/8-不等式とその背景

亀谷 幸生 (慶応大理工)

11月8日の幾何　於：東大数理 2026年11月8日

古田さんとの共同研究の出会い (2000年頃)
きっかけ (局所化，スピン構造を使ってSWホモトピー
不変量を理解したい.)

目 次


1 可微分構造の埋め込みによる視覚化 0

2 指数定理=写像度の等式 1

3 微分作用素の構造を表現する代数 2

4 スピン$^c$構造とDirac作用素 3

5 スピン$^c$構造の伝搬と$K$-群（「ベクトル束差」を表現する代数） 4

6 Dirac作用素の「指数差」と$K$群における局所化 5

7 10/8-不等式 6

8 コボルディズム論(再) 7

9 3次元コボルディズム不変量 8

## 1　可微分構造の埋め込みによる視覚化

▸ $X$ : 向きづけられた $k$ 次元可微分閉多様体

$C^\infty(X)$ : $C^\infty$-実関数環,

$I\colon X \subset \mathbf{R}^{C^\infty(X)} = \mathrm{Map}(C^\infty(X), \mathbf{R})$ $I(x) = \delta_x = [f \mapsto f(x)]$ (対称性が高い. e.g. 群作用)

$\exists A \subset C^\infty(X; \mathbf{R})$ ; 有限集合, s.t. $i : X \subset \mathbf{R}^{C^\infty(X)} \xrightarrow{\pi} \mathbf{R}^A = \mathbf{R}^n$　埋め込み, $n = |A|$

: 写像 $I$ の「有限次元近似」

▸ $X \subset N \subset \mathbf{R}^n$ ; $X$ の $\mathbf{R}^n$ における法束 ($X \subset N^\infty \subset \mathbf{R}^{C^\infty(X)}$ 法束 $N^\infty$ の「有限次元近似」)

• ($X$ の局所座標) × (法束 $N$ のファイバー)=($\mathbf{R}^n$ の局所座標) (「可視化」)

• $TX \oplus N = \underline{\mathbf{R}}^n \Rightarrow \Lambda^{n-k}(N) = \Lambda^n(\underline{\mathbf{R}}^n) \otimes \Lambda^k(T^*X) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{R}}(\Lambda^k(TX), \Lambda^n(\underline{\mathbf{R}}^n))$　(向きの伝搬)

▸ $\pi : \tilde{\gamma}^{n-k}(\mathbf{R}^n) \to \tilde{G}r_{n-k}(\mathbf{R}^n)$ : 向き込みの Grassmann 多様体上の標準束

$$f_N\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tilde{G}r_{n-k}(\mathbf{R}^n), \\ \cap & & \cap \\ N & \longrightarrow & \tilde{\gamma}^{n-k}(\mathbf{R}^n), \end{array} \quad x \longmapsto N_x, \quad N \to X \text{の分類写像, } (n = k+1 \Rightarrow \text{Gauss 写像})$$

$$\widehat{f}_N\colon \begin{array}{ccc} N & \longrightarrow & \tilde{\gamma}^{n-k}(\mathbf{R}^n), \\ \cap & & \cap \\ N & \longrightarrow & \tilde{\gamma}^{n-k}(\mathbf{R}^n), \end{array} \quad v \longmapsto (N_{\pi(x)}, v), \text{ 全空間への持ち上げ}$$

$$\widehat{f}_N^\infty\colon S^n \longrightarrow T(n, n-k), \quad S^n \backslash N \longmapsto \infty, \text{ コンパクト化への拡張 } (\Rightarrow \text{埋め込み} \to \text{沈め込み})$$

$S^n = \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}$, $T(n, n-k) := \tilde{\gamma}^{n-k}(\mathbf{R}^n) \cup \{\infty\}$ :「Thom 空間」の「有限次元近似」

## 2　指数定理=写像度の等式

▸ $n = k+1 \Rightarrow \tilde{Gr}_1(\mathbf{R}^{k+1}) = S^k$, $f_N : X \to S^k$,　　$\deg : [X, S^k] \cong \mathbf{Z}$: 写像度

(Gauss-Bonnet の定理) $\dfrac{1}{\mathrm{vol}(S^k)} \displaystyle\int_X K = \chi(X)\ (= \deg(f_N^* : H^k(S^k) \to H^k(X)))$

$K = (S^k$ の体積要素の引き戻し$)=($Thom 形式の任意ベクトル場による引き戻し$)$

▸ $\widehat{f}_N^{\infty} : (S^n, \infty) \longrightarrow (T(n, n-k), \infty)$ の「写像度」

(Thom) $n >> k \Rightarrow T : \pi_n(T(n, n-k), \infty) \xrightarrow{\cong} \Omega_k^{\mathrm{ori.}}$「コボルディズム写像度」,

• $\Omega_k^{\mathrm{ori.}} := \{X$ : 向きづけられた $k$ 次元可微分閉多様体$\}/\sim$ : コボルディズム群

$X_1 \sim X_2 \Leftrightarrow \exists W$: コンパクト s.t. $\partial W = X_1 \coprod (-X_2)$.

• $T[f] = [f^{-1}(\tilde{Gr}_k(\mathbf{R}^n))]$

• $T^{-1}[X] = [\widehat{f}_N^{\infty}]$ $(X \subset \mathbf{R}^n)$ : $X$ の近傍に局所化されている写像

(Serre, Thom) $n >> k$, $k \equiv 0 \pmod 4$

$\Rightarrow [\mathbf{C}P^{2k_1} \times \cdots \times \mathbf{C}P^{2k_r}]$ $(4(k_1 + \cdots + k_r) = k)$ は $\Omega_k^{\mathrm{ori.}} \otimes \mathbf{Q}$ の基底

$$\Rightarrow [X] = \sum_{4(k_1+\cdots+k_r)=k} \exists!\, t_{k_1,\ldots,k_r}(X)[\mathbf{C}P^{2k_1} \times \cdots \times \mathbf{C}P^{2k_r}] \in \Omega_k^{\mathrm{ori.}} \otimes \mathbf{Q}$$

▸ (Hirzebruch 符号数定理) $\dim X = k \equiv 0 \pmod 4$

$(\wedge : H^{2k}(X) \times H^{2k}(X) \to \mathbf{R}$の符号数$) = \sigma(X) = \langle L(TX), [X] \rangle (= \sum t_{k_1,\ldots,k_r}(X))$

$\Leftarrow$ ($\mathbf{C}P^{2k_1} \times \cdots \times \mathbf{C}P^{2k_r}$ の符号数$)=(L$種数$)= 1$.

## 3　微分作用素の構造を表現する代数

▸ 更に $X$ : **Riemann** 多様体

$\chi(X) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \dim H^i(X; \mathbf{R}) = \mathrm{ind}(d + d^* : \Omega^{\mathrm{even}} \to \Omega^{\mathrm{odd}})$ **Hodge** 分解

$\mathrm{ind} A := \dim \mathrm{Ker}\, A - \dim \mathrm{Ker}\, A^*, \quad (d + d^*)^2 = \Delta : \Omega^{\mathrm{even/odd}} \to \Omega^{\mathrm{even/odd}}$

$\nabla$ : $X$ の **Levi-Civita** 接続 (=ベクトル場の全微分), $X \subset \mathbf{R}^n \Rightarrow \nabla = \mathrm{Proj.} \circ d$

$\varepsilon = \wedge : T^*X \times \Lambda^p(T^*X) \to \Lambda^{p+1}(T^*X), \quad \iota = \varepsilon^* : T^*X \times \Lambda^{p+1}(T^*X) \to \Lambda^p(T^*X)$

$c := \varepsilon - \iota : T^*X \rightharpoonup \Lambda^*(T^*X)$ **Clifford** 作用, $\quad c(v) \circ c(v) = -(v, v) 1_{\Lambda^*(T^*X)}$

$\Rightarrow d + d^* = c \circ \nabla : \Omega^{\mathrm{even}} \to \Omega^{\mathrm{even}}(T^*X) \to \Omega^{\mathrm{odd}}$. $c$ =(組み合わせ規則)

**Gauss-Bonnet** の定理 : $\mathrm{ind}(c \circ \nabla : \Omega^{\mathrm{even}} \to \Omega^{\mathrm{odd}}) = \langle \chi(TX), [X] \rangle$

▸ **Hodge star** $*$ による固有分解 : $\Omega^* = \Omega^+ \oplus \Omega^-$, $*^2 = 1$

$\sigma(X) = b^+(X) - b^-(X) = \mathrm{ind}(d + d^* : \Omega^+ \to \Omega^-)$,

$d + d^* = c \circ \nabla : \Omega^+ \to \Omega^-$.

**Hirzeburch** の符号数定理 : $\mathrm{ind}(c \circ \nabla : \Omega^+ \to \Omega^-) = \langle L(TX), [X] \rangle$.

▸ 更に $X$ : **Kähler** 多様体

$c^{0,1} : TX \cong T^*X^{0,1} \rightharpoonup \Lambda^*(T^*X^{0,1})$ **Clifford** 作用, $\quad c^{0,1}(v) \circ c^{0,1}(v) = -(v, v) 1_S$

$\Rightarrow \bar\partial + \bar\partial^* = c^{0,1} \circ \nabla : \Omega^{0,\mathrm{even}} \to \Omega^{0,\mathrm{odd}}$

**(R-R-H)** $\mathrm{ind}(\bar\partial + \bar\partial^*) = \mathrm{ind}(c^{0,1} \circ \nabla : \Omega^{0,\mathrm{even}} \to \Omega^{0,\mathrm{odd}}) = \langle \mathrm{Td}(TX), [X] \rangle$

## 4　スピン$^c$構造とDirac作用素

▸ $X$: Riemann 多様体,　$S \to X$ : 複素ベクトル束

$c : T^*X \curvearrowright S$ : Clifford 作用 $\Leftrightarrow$ $c(v) \circ c(v) = -(v,v)1_S$ $(v \in S)$

$\Rightarrow c : Cl(T^*X) := T(T^*X)/(v \otimes v + (v,v)) \curvearrowright S$,　$Cl(T^*X)$ : Clifford 代数

$\Phi : \Lambda^*(T^*X) \cong Cl(T^*X)$,　$e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \longleftrightarrow e_{i_1} \cdots e_{i_k}$,　$((e_i, e_j) = \delta_{i,j})$ : 量子化写像

$\Gamma = \Phi(\mathrm{vol})$ : カイラル要素, $\Gamma^2 = 1$,　$S = S^+ \oplus S^-$ : 固有分解,

$\tilde{\nabla}$ : $S$ 上の Clifford 接続 $\Leftrightarrow$ $c$ が Levi-Civita 接続 $\nabla$ と $\tilde{\nabla}$ を保つ.

$S$ に $c(v)$ $(||v|| = 1)$ が等長的となる Hermite 計量を入れる.

$\Rightarrow D_X = c \circ \tilde{\nabla} : C^\infty(S) \to C^\infty(S \otimes T^*X) \to C^\infty(S)$ : Dirac 作用素, $D\Gamma = -\Gamma D$

$D_X^+ : C^\infty(S^+) \to C^\infty(S^-)$,　$D_X^+(fs) = c(df)s + fD_X^+ s$

$D_{X,F}^+ := D_X^+ \otimes 1_F : C^\infty(S^+ \otimes F) \to C^\infty(S^- \otimes F)$,　$F \to X$ : 複素ベクトル束

▸ $(S, c)$:$X$ のスピン$^c$構造 $\Leftrightarrow S_x : Cl(T_x^*X)$-既約 $\Leftrightarrow Cl(T^*X) \overset{c}{\cong} \mathrm{End}(S) = S \otimes S^*$

$\Rightarrow \mathrm{ind}(D^+_{X,(S^+)^*}) - \mathrm{ind}(D^+_{X,(S^-)^*}) = \mathrm{ind}((d + d^*) \otimes 1_{\mathbf{C}} : \Omega^{\mathrm{even}}(\mathbf{C}) \to \Omega^{\mathrm{odd}}(\mathbf{C}))$,

$\mathrm{ind}(D^+_{X,(S^+)^*}) + \mathrm{ind}(D^+_{X,(S^-)^*}) = \mathrm{ind}((d + d^*) \otimes 1_{\mathbf{C}} : \Omega^+(\mathbf{C}) \to \Omega^-(\mathbf{C}))$

$(\Lambda^*(T^*X^{0,1}), c^{0,1})$ : Kähler 多様体 $X$ のスピン$^c$, $D_X^+ = \bar{\partial} + \bar{\partial}^* : \Omega^{0,\mathrm{even}} \to \Omega^{0,\mathrm{odd}}$

## 5　スピン$^c$構造の伝搬と$K$-群（「ベクトル束差」を表現する代数）

▸$\pi : E \to X$：内積をもつ向きづけられた偶数次元ベクトル束

$$(S,c) = (S(E),c)：E\text{のスピン}^{\mathbf{c}}\text{構造} := \begin{cases} S : X \text{ 上の複素ベクトル束}, \\ c : E \curvearrowright S：\text{既約}\,\mathrm{Clifford}\,\text{作用}\ (c(v)^2 = -(v,v)1_S) \end{cases}$$

• $(S,c) \leftrightarrow c_1 \in H^2(X;\mathbf{Z})$ s.t. $c_1 \equiv w_2(E) \pmod 2$

$X \subset N \subset \mathbf{R}^{2n}$ 埋め込み $\Rightarrow TX \oplus N = \underline{\mathbf{R}}^{2n} \Rightarrow \Lambda^*(TX) \otimes \Lambda^*(N) = \Lambda^*(\underline{\mathbf{R}}^{2n})$

$$(S(TX),c)：X\text{のスピン}^{\mathbf{c}}\text{構造} \Rightarrow \begin{cases} Cl(TX) \otimes Cl(N) \xrightarrow{\cong} Cl(\underline{\mathbf{R}}^{2n}),\ a \otimes b \mapsto a(\Gamma_N)^{\deg a} b：\text{代数同型} \\ S(TX) \otimes S(N) = S(\underline{\mathbf{R}}^{2n}) = \Lambda^*(\underline{\mathbf{C}}^n) \\ \Leftrightarrow S(N) = S(\underline{\mathbf{R}}^{2n}) \oslash S(TX) := \mathrm{Hom}_{Cl(TX)}(S(TX), S(\underline{\mathbf{R}}^{2n})) \\ \Rightarrow (S(N),c)：N\text{のスピン}^{\mathbf{c}}\text{構造} \quad (TX\text{から}N\text{への伝搬}) \end{cases}$$

▸$A$：可換半群 $\Rightarrow$ $K(A) = (A \times A)/\Delta$：加群，s.t. $0 = [a,a]$, $-[a,b] = [b,a]$

$(\mathrm{e.g}\ K(\mathbf{N}) = \mathbf{Z} \quad a - b := [a,b],\ 0 = a - a)$

$B$：コンパクト $\Rightarrow K(B) := K(\mathrm{Vect}(B))$, $\mathrm{Vect}(B) = \{[E] \mid E \to B : \text{複素ベクトル束}\}$

$B$：局所コンパクト $\Rightarrow K(B) := \ker(K(B \cup \{\infty\}) \to K(\infty)$

$B$：コンパクト多様体

$\Rightarrow K(B \backslash \partial B) \cong \{[E_0, E_1, \varphi : E_0|\partial B \xrightarrow{\cong} E_1|\partial B] \mid E_0, E_1 \to B\}$ ($K$-群の切除性)

$\Rightarrow \beta(E) := [\pi^*S^+, \pi^*S^-, \pi^*c : \pi^*S^+|\partial D(E) \to \pi^*S^-|\partial D(E)] \in K(E)$：Bott 類

## 6　Dirac 作用素の「指数差」と $K$ 群における局所化

▸ $E$ : 複素ベクトル束 $\Rightarrow (S(E), c) := (\Lambda^*(E^{0,1}), c^{0,1})$ : $E$ の標準スピン$^{\mathbf{c}}$ 構造

$p : \mathbf{C}^n \to \{0\}$ の標準スピン$^{\mathbf{c}}$ 構造 $(S(\mathbf{C}^n), c) \Rightarrow \beta(\mathbf{C}^n) \in K(\mathbf{R}^{2n}) \subset K(S^{2n})$

(Bott の周期性定理) $\beta : \mathbf{Z} \to K(\mathbf{R}^{2n}), \quad \beta(m) = m\beta(\mathbf{C}^n)$

は同型写像であって, $\beta^{-1}([E_0]-[E_1]) = \mathrm{ind} D^+_{S^{2n},E_0} - \mathrm{ind} D^+_{S^{2n},E_1} \quad (E_0, E_1 \to S^{2n})$

$X \subset N \subset \mathbf{R}^{2n} \Rightarrow \beta(N) \in K(N) \to K(\mathbf{R}^{2n})$ : $X$ の近傍に局所化されている要素

$\beta(N) = \exists a(X)\beta(\mathbf{C}^n) \in K(\mathbf{C}^n) \cong [S^{2n}, Gr_p(\mathbf{C}^{2p})]$, $a(X)$ : $\beta(N)$ の「$K$-写像度」

(「指数差」による $a(X)$ の計算) $(S, c) = (S(T^*X), c) = (S(TX), c)$ とするとき,

$\beta^{-1}(\beta(N)) = \mathrm{ind}(D^+_X : C^\infty(S^+) \to C^\infty(S^-)) \Leftrightarrow a(X) = \mathrm{ind} D^+_X \in \mathbf{Z}$　(指数差の切除性+積公式)

(Atiyah-Singer 指数定理) : $\mathrm{ind} D^+_X = \langle e^{c_1(L_S)/2} \mathrm{Td}(TX), [X] \rangle \, (= a(X))$

$\Leftarrow$ $a(X)$=($\beta(N)$ の指数差による計算)=(Chern 指標による計算)

$L_S := \mathrm{Hom}_{Cl(T^*X)}(\overline{S}, S)$ : $(S, c)$ の「標準直線束」

($X$ : Kähler $\Rightarrow$ $L_{\Lambda^*(T^*X^{0,1})} = K_X$)

$$(S, c, \nu) \text{ : } X \text{ のスピン構造} := \begin{cases} (S, c) : X \text{ のスピン}^{\mathbf{c}} \text{ 構造} \\ \nu \text{ : } L_S \text{ の自明化} \Leftrightarrow \nu : (\overline{S}, c) \xrightarrow{\cong} (S, c), \\ \nu^2 = \pm 1, \text{ 符号は } \dim X = k \text{ にのみよる.} \end{cases}$$

## 7　10/8-不等式

▸ $X=(X,S,c,\nu)$ : 4次元スピン閉元多様体,

$\Rightarrow su(L_S)=\coprod\limits_{x\in X}(ir1_{S_x})\mid r\in\mathbf{R}\}=i\underline{\mathbf{R}}=i\mathbf{R}$

$\nu:(\overline{S},c)\to(S,c)$ s.t. $\nu^2=-1\Rightarrow\nu:i\mathbf{R}\to i\mathbf{R},\ \nu(ir)=-ir.$

$\Rightarrow j=\nu$ とおくと $\mathbf{H}\curvearrowright S^{\pm},i\mathbf{R},\ k=-\frac{\sigma(X)}{16}\geqslant 0,\ l=b_2^+(X)>0$

(モノポール方程式)+(ゲージ固定化) の Maclaurin 展開 :

$$F=(D^+,d^*+d^+)+Q,\quad Q(0,\alpha)=(0,0),\quad \mathrm{Pin}(2)=\langle U(1),j\rangle\subset\mathbf{H}$$

$$\begin{array}{ccc} F:C^\infty(S^+)\oplus\Omega^1(i\mathbf{R}) & \to & C^\infty(S^-)\oplus(\Omega^0(i\mathbf{R})/(i\mathbf{R})\oplus\Omega^+(i\mathbf{R})) \\ \cup & & \cup \\ \exists f:\mathbf{H}^{x+k}\oplus\tilde{\mathbf{R}}^y & \to & \mathbf{H}^x\oplus\tilde{\mathbf{R}}^{y+l} \end{array}$$

: Pin(2)-同変, : Pin(2)-同変, $F$ の有限次元近似

s.t. $(M:=F^{-1}(0,0)$ : コンパクト $\Rightarrow)\ m:=f^{-1}(0,0)$ : コンパクト

$\Rightarrow f\simeq\widetilde{f}:\mathbf{H}^{x+k}\oplus\tilde{\mathbf{R}}^y\to\mathbf{H}^x\oplus\tilde{\mathbf{R}}^{y+l}$ : Pin(2)-同変固有

$\Rightarrow\widetilde{f}^*:K^*_{\mathrm{Pin}(2)}(\mathbf{H}^x\oplus\tilde{\mathbf{R}}^{y+l})\to K^*_{\mathrm{Pin}(2)}(\mathbf{H}^{x+k}\oplus\tilde{\mathbf{R}}^y)$

$\Rightarrow\tilde{f}^*\beta(\mathbf{H}^{x+k}\oplus\tilde{\mathbf{R}}^y)=\exists\,\alpha\beta(\mathbf{H}^x\oplus\tilde{\mathbf{R}}^{y+l}),\ \alpha\in R(\mathrm{Pin}(2))$ :「$K$-写像度」　($\Leftarrow l>0$ :偶数)

$\Rightarrow e(\tilde{\mathbf{R}}^l)=\alpha e(\mathbf{H}^k)\ \Rightarrow\alpha=2^{l-2k-1}([\mathbf{R}]-[\tilde{\mathbf{R}}])\otimes[\mathbf{C}]\Rightarrow l\geqslant 2k+1$

$(\mathbf{Furuta})\ l\geqslant 2k+1\Leftrightarrow b_2(X)\geqslant\frac{10}{8}|\sigma(X)|+2,\quad (\frac{11}{8}\text{-予想})\ b_2(X)\geqslant\frac{11}{8}|\sigma(X)|$

## 8　コボルディズム論 (再)

一方, $M$ : コンパクト $\mathrm{Pin}(2)$-同変スピン$^c$ 多様体, $(0,0)$ : $\mathrm{Pin}(2)$-特異点

$(0,0)$ の $M$ における近傍 $\cong \varphi^{-1}(0)$　$(\varphi : \mathbf{H}^k \to \tilde{\mathbf{R}}^l$ : $\mathrm{Pin}(2)$-同変$)$

**(Ka-.)** $\partial(M \backslash ((0,0)$ の近傍$)) = 0$ ($\mathrm{Pin}(2)$-同変自由スピンコボルディズム群の零)

$\Rightarrow e(\tilde{\mathbf{R}}^l) = \alpha e(\mathbf{H}^k)$ ($K$-写像度 $\alpha$ の局所化)

注. $[M \backslash ((0,0)$ の近傍$)] = [\hat{m} \backslash ((0,0)$ の近傍$)]$ (真の解空間への局所化)

$\Rightarrow$ $j$ 作用を忘れると, **Seiberg-Witten** ホモトピー不変量である. **(Furuta-Ka.-Matue, Furuta-Ka.-Matue-Minami, Furuta-Ka.)**

## 9　3次元コボルディズム不変量

▸ $X = (X, S, c, \mu)$：4次元スピン閉多様体

**(H-符号数定理)+(R-R-H)** $\sigma(X) = \frac{1}{3}\langle p_1(TX), [X]\rangle = -8\,\mathrm{ind}D_X^+ \equiv 0 \pmod{16}$

$Y$：ホモロジー3次元球面, $X$：コンパクト4次元スピン多様体, $\partial X = Y$

**(Rokhlin不変量)** $\mu(Y) = \frac{1}{8}\sigma(X) \pmod 2$ は $X$ のとり方によらない.

▸ ($\frac{10}{8}$-不等式) $\Leftrightarrow b_2^+(X) \geqslant \mathrm{ind}D_X^+ + 1$ ($p_1(TX)$ を介していない)

$\check{X}$：スピン$^c$ $V$-多様体, $\partial\check{X} = Y$, $Z$：スピン, $\partial Z = -Y$

**(Fukumoto-Furuta)** $\omega(\check{X}, Y) := \frac{1}{8}\left(8\,\mathrm{ind}D^+_{\check{X}\cup_Y Z} + \sigma(Z)\right) \in \mathbf{Z}$

$\omega(\check{X}, Y) = \frac{1}{8}(\mathrm{ind}D^+_{\check{X}\cup_Y Z, \mathbf{C}^8\oplus S^*} - \sigma(\check{X}))$,：$Z$ のとり方によらない $\because Z'$: もう一つ

$\widetilde{W} := (\check{X}\cup Z)\coprod((-Z')\cup_Y Z')$, $\widetilde{W}' := (\check{X}\cup Z')\coprod((-Z')\cup_Y Z)$：閉 $V$-多様体

$$\mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}, \mathbf{C}^8\oplus S^*} - 3\sigma(\widetilde{W}) = \mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}, \mathbf{C}^8\oplus S^*} - \mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}, S^*\oplus S^*\oplus S^*}$$

$$\underset{\text{exc.}}{=} \mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}', \mathbf{C}^8\oplus S^*} - \mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}', S^*\oplus S^*\oplus S^*} = \mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}', \mathbf{C}^8\oplus S^*} - 3\sigma(\widetilde{W}')$$

$$\mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}, \mathbf{C}^8\oplus S^*} = \mathrm{ind}D^+_{\check{X}\cup_Y Z, \mathbf{C}^8\oplus S^*} + 0, \quad \mathrm{ind}D^+_{\widetilde{W}', \mathbf{C}^8\oplus S^*} = \mathrm{ind}D^+_{\check{X}\cup_Y Z', \mathbf{C}^8\oplus S^*} + 0,$$

- $\check{X}$: スピン $\Rightarrow \omega(\check{X}, Y) = \mu(Y) \pmod 2$
- $\check{X}$: スピン, $\exists Z$: コンパクト非輪状 $\partial Z = -Y$
  $\Rightarrow (\pm(\check{X}\cup_Y Z)$ に対する $\frac{10}{8}$-不等式$)\ 1 - b^2_-(\check{X}) \leqslant \omega(\check{X}, Y) \leqslant 1 + b^2_+(\check{X})$

## 参考文献


[1] M. Furuta, *Monopole equation and the* 11/8 *conjecture*, Math. Res. Lett., 8 (2001), 279-291.

[2] Y. Fukumoto and M. Furuta, *Homology* 3*-spheres bounding acyclic* 4*-manifolds*, Math. Res. Lett., 7 (2000), 757-776.

[3] 古田幹雄, 指数定理1, 2, 岩波書店 (1998).

[4] Y. Kametani, *Spin structures and the divisibility of Euler classes*, arXiv : math.GT/1809.04045.

[5] 亀谷幸生, 幾何学と物理 (3章 : 指数定理とゲージ理論), 朝倉書店 (2023).