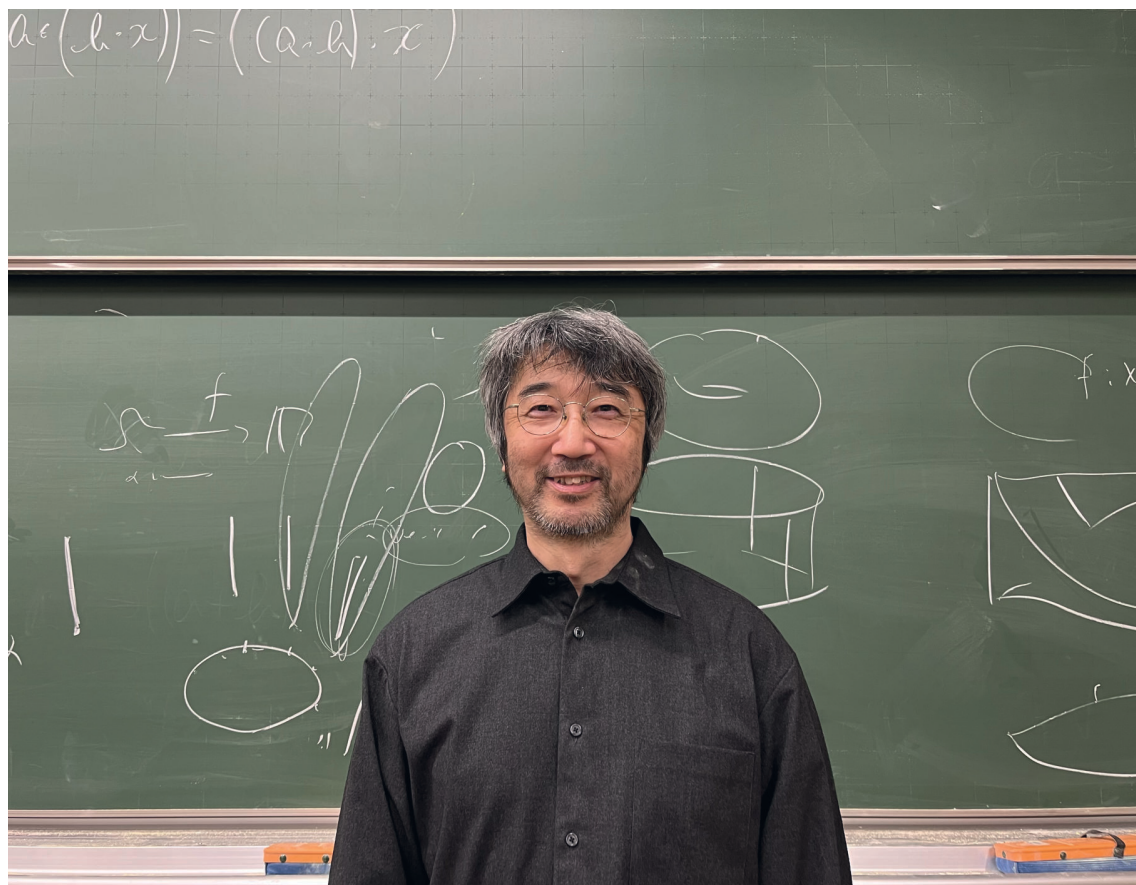


古田幹雄先生ロングインタビュー



略歴

ふるた みきお
古田幹雄 先生

1985 年 東京大学 大学院理学系研究科 修士課程修了

その後 東京大学 理学部 助手,
同大学 教養学部 助教授,
同大学 数理科学研究科 助教授,
京都大学 数理解析研究所 助教授 を経て,
東京大学 数理科学研究科 教授 現在にいたる

専門分野：位相幾何学, 大域解析学

聞き手

倉持, 宮森, 横山, 吉澤

インタビュー

以下、敬称略。

——本日はお忙しい中インタビューを受けていただきありがとうございます。早速インタビューに入らせていただくのですが、20 年ほど前に都数でインタビューさせていただいたとき^{*1}には、あまり大学時代をお聞きできなかったもので、大学時代のお話をお聞かせいただければと思います。大学時代の印象に残っている講義、あるいは先生はいますか？

古田：教育的配慮を考えるとあんまり...（一同笑）。

印象に残っていた講義はもちろんありますね。1 つは伊原先生^{*2}という整数論の方の講義です。日本語に訳されている Serre の有限群の本^{*3}がありますが、それを使った講義でした。何をしたかという、伊原先生は前に座って内職をしているんです。そしてその前にちゃんと宣言されるわけですが、なんとおしゃったかという「ミスプリを見つけてください」。それでみんな一生懸命読んでミスプリを探すわけですね、という講義がありました（一同笑）。

——それは演習ですか？

古田：演習じゃなかったと思うな（一度笑）。あんまり詳しく覚えてないですけど、すごく印象的でしたね。

——実際にミスプリを見つけた人はいるんですか？

古田：あんまり覚えてないですよ。でも本はだいたいミスプリありますよね。符号はよく間違えますが、偶数回間違えていると見つけにくいですよ（一同笑）。Serre のあの本でミスプリを見つけたかどうか覚えていないですけどね。まあそう言うちゃんと学生が読むだろうということだと思います。

伊原先生は他に、今本になって出ていますけれど^{*4}、数学の研究者をになるためには、というような話をしてくださった時がありました。その時に印象的だったのは、「あるレベルに到達するには、どう

いう道筋を通っても別にそれは関係なくて、とにかくここに到達したか到達していないかが大事だ」というような意味のことを言われたように記憶しています。でも記憶は捻じ曲がってしまうからわかりにくいですけどね。それは一つ印象的でしたね。

他に印象的なものとしては、松本幸夫先生という方の講義で、4 次元での Rochlin の定理という定理がありまして、その初等的な証明というか、松本先生が見つけた証明を紹介するというものがありました。その講義のノートをつまみ、講義に出ていた人から 2、3 年前に見せてもらったんです。自分も出ていたんですけど、自分のノートはちょっとどこにあるかわからないので。それでノートを見せてもらおうと、当時はきつとわかってなかったんですけど、すごく面白かったんです。だからこれは、当時はあんまりわかっていなかったけれど、後でそのノートを見返すと面白かったという例ですよ。

それから、田村一郎先生という方がいて、その田村一郎先生の最後の定年直前の一連の講義というのが印象的だったんです。それは未解決問題を解決しようというもので、できたと思っても穴がある、できたと思っても穴がある。それをそのまま講義にしてくださいというか、あるいは講義の時間をそういう風に使っていた（一同笑）、というものがありましたね。

ちょっと似ている話では、私の指導教員の服部晶夫先生という先生は、やはり自分の研究していることを講義してくださいました。その内容というのは、複素射影空間と似た空間、つまりホモロジーが複素射影空間と同型であるような多様体への群作用についてでした。そのような多様体に S^1 の作用があったとする。その作用には、fixed point とかがあったり

^{*1} 「数学のなにか 第 44 号」、都内数学科学生集合、2001

^{*2} 伊原康隆

^{*3} J. -P. セール「有限群の線型表現」、岩波書店、1974

^{*4} 伊原康隆「志学数学 -研究の諸段階 発表の工夫」丸善出版、2012

するわけですが、その作用の様子が、本物の複素射影空間にきれいに linear に S^1 が作用している時とどれくらい近いだろうか、という問題意識でしたね。この問題意識がそもそもどこから来るかというと、高次元の微分トポロジーの問題で、homotopy type は同じだけれど、diffeo じゃないというものにどんなものがあるのだろう、というのは微分トポロジーの発祥からある問いでした。とくに高次元球面でこの問題は深く研究されています。これと同様の視点で、多様体への群作用を考察するというをやっておられました。この問題を考えるために、K 理論の pushforward などいろいろな道具があるのですが、そういう概念を講義で導入して、それをこう使うんだという形で示してくださったんです。後に阿原さん^{*5}という私の後輩というか、やはり服部先生の弟子の方ですけれども、その方の修士論文だったかドクター論文だったかが、その研究の一部がそれに関することでしたね。服部先生のその時の何冊ものノートが実は今私の倉庫と化した部屋にあるんですけれども、中にまだいろんなことが含まれていると思います。そういう講義のあり方というのは印象的でしたね。

これは自分が学生の時ではないですけど、ドクターの学位を取った直後のことです。私は論文博士なので課程博士ではないんですけど、年齢としては今でいうとポスドクと同じぐらいの年で、Oxford に滞在していたことがあり、そこでいろいろな講義に出たんです。Algebraic K-theory など知られている Quillen^{*6}という人がいます。その Quillen の講義というのがやはりすごく印象的でした。考えたこともいっぱい話すんですけども、ワーッと黒板に式をいっぱい書くんですね。それは、cyclic cohomology という概念を使って何かを計算するということだったらしいんですね。何をやってるかわかんないんですけども、どんどん毎回進んでいくというものでした。他に Oxford で印象的だった講義といえば、一番印象的だったのは Segal^{*7} という人の講

義でしたね。Segal という方のことは、有名な所では有名ですけども、もっと広く知られていておかしくない気がします。彼は周りの若い人たちに、あるいは若くなくてもですけど、多大な影響を与えた人だと思います。当時の Segal は講演する時に、チョーク以外は何も持たないで、そして上は黒い T シャツで下はジーパンでササッと出ていって何か説明するんですけど、その説明というのがおそらく誰とも違うような見方で何かを説明してくれるんですよね。例えば KdV 方程式というものがありますけれども、それはこういう風に見られるという事とか。講演だけでなく、Segal の講義もおそらく刺激的でおもしろかったです。代数トポロジーの講義というのをしていたんです。東大で言うと 3 年生の時にやりますよね。Segal の講義の部屋はいつも満席でした。学生もいますけれども、faculty member がいっぱい出ているわけですね。Segal が果たしてその algebraic topology で何を喋るのかと。その講義で「コホモロジーというのは小学生でも言って知っている」と言っていたのを一つ覚えてるんですけどもわかりますか？（一同笑）

——ピンとこないです...

Segal は「それは足し算の繰り上がりだ」と続けました。ちょっと数学の話になってしまうけれど、繰り上がりはよく考えると群のコホモロジーのコサイクルと思える。群の short exact sequence があると、コホモロジーの間に関係ができて、たとえば中心拡大があると群の 2 次のコホモロジーの要素を使ってその中心拡大が書けたりもします。そうしたことの一番原初的な形がここにある、というようなことを言ったんだと思うんです。けれどおそらく学部 3 年生の授業でそれを言ってもきっとあまり通じないですよ。だけどその Segal の講義ではワッと湧きましたね。つまりそんな冗談が当たり前に通じるような人たちが大勢詰めかけていたわけです。Segal は若い人ひとり一人に、私も含めですけど、すごく丁寧に親切に、自分の書きかけのものを渡してくだ

^{*5} 阿原一志

^{*6} Daniel Quillen

^{*7} Graeme Segal

さったりしました。あと Penrose^{*8}の講義もちょっと出たことがあります。Twistor theory の講義で、Penrose のオリジナルのいろんな記号が出てくるので、訳わからな記号だらけなんですよね。それで出席していても訳わからなかったんですけど、出席者が私の他に1人で、たった2人しかいない。だから一応出ましたけれど、あれは接したというだけになりましたけどね。

——印象に残ってるだけあって個性的な講義ばかりでしたが、それはいい印象ですか、悪い印象ですか？

古田：いい悪いとはちょっと別です。いい悪いというのは自分に予め判断基準が無意識にでもあって、それと照らしたらどうだという感じですよ。そうじゃなくて、こっちは真っさらで、いきなりとんでもないものが飛んで来たというか、ぶつけられたというか、ああこんな世界があってこんな感じなのかっていうような。例えば伊原先生のさっき言った講義は、教える方は楽ですよ（一同笑）。それで確かに学生が本に向かい合うことになるし、そういう意味ではいいやり方なのかもしれないけれど、シラバスにちゃんと書かされる今はちょっとそういうことはできませんね。3年生の時に先輩の宇澤さん^{*9}という方に、岩堀先生^{*10}という先生のゼミにちょっと連れていってもらいました。1つの教室で、学部生、修士、ドクターの人たち、いろんな大学の人がいって何かやっているのですが、その一番隅っこの辺り、入り口からすぐの所にちょこんといました。するとゼミが終わった後すぐに「君は誰だ！」と当たり前ですけど言われました。そのあと3年生の間ずっと出ていましたね。

それもなかなか強烈でした。研究者の人たちが色々議論するわけですよ。こっちはほとんどわからない。けれど、「みんなああいうのが当たり前にわかるんだ」という衝撃はありますね。でも後で思うと、あそこでやられていたことを、全ての、例えば今の院生とか幾何の研究者が聞くと理解できるかという、きっとそうではない。それぞれ分野の専門

があるわけですね。何が専門のことで何がもっと一般的にわかっていることなのか、そういうこともその頃はわかっていなかったですね。

その時、私の1年上の寺田至さんという方と、初めて共同研究めいたことをやったのがすごい印象に残ってます。岩堀先生という方は毎回パズルというか、クイズみたいなものを持ってくるんですよ。ある日持ってきたパズルは何かというと、石取りゲームでした。小石がいくつかあって二人の人がいて、最初いくつか石を取るけれど全部は取らない。その次の人も石をいくつか取るんだけど、前の人が取った個数の2倍以下の個数だけ取れる。以下同様としていくとどっちかが勝つわけで、どちらかに必勝法があるわけだけれど、石の個数によって違いますね。では先手と後手のどちらが必勝なのか。どちらか今すぐ出てきませんが、それを石の個数でどうなるか調べると、ちょうどフィボナッチ数列が出てくるということを紹介されました。そして問題として、これが2倍じゃなくてもっと他のなんとか倍だったらどうだろう、というのを出されました。フィボナッチ数列って漸化式を満たしますよね。これが2倍じゃなくて、 λ という数を持ってきて λ 倍というのにしてもやはりある漸化式によって表されるということがわかるんです。岩堀先生は、さらに「 λ 倍」を一般化して、次のような関数を使ったゲームを提示していました。ある局面で石が x 個残されていたとすると、その次の番の人が取り出せる石の数が1以上 $f(x)$ だとするルールをおく...。ただし関数 $f(x)$ は、 x を無限大にとぼすとき $f(x)/x$ が λ に収束するという性質をもつと仮定しておきます。そういう場合でもぴったり λ の場合と同じ漸化式を満たすという風に岩堀先生はさりげなく断言したんです。それでその証明を自分で考えようと思いました。だけど考えていたら、ある特別な λ の値だけですけれど、無限個の λ で、その主張の反例があるということがわかったんです。そういうことを岩堀先生のセミナーのあとで黒板の前で話したのが、その寺田

^{*8} Roger Penrose

^{*9} 宇澤達

^{*10} 岩堀長慶

さんとの共同研究の始まりでした。それがどういう現象なのかとか調べました。ちょっと面白かったのが、ある整数多項式の既約性という一見全然関係ないようなことを議論の途中で使うということがありました。その多項式の既約性というのはたまたま岩波の数学の叢書みたいなもの^{*11}が出ていて、その中の藤崎先生の書いた「体とガロア理論」^{*12}という本にたまたま載っていたものだったんです。そういう風に違う分野の事が関係するということを、一緒に議論しながら、どっちがリードするという形でもなく、一緒に考えているからこそ見えてくるというのはすごくエキサイティングな経験でしたね。これは講義とは違いますけれど、セミナーを覗かせてもらうことから派生した忘れがたい経験でした^{*13}。

他に印象に残っていることとしては、五月祭で球面裏返しのパズルを流したのと、コンピューター占いというのをやりました。私はコンピューター占いには全然タッチしてなかったんですけど、私はその頃、その後修士に進むのではなく就職する友達とか、その後研究者にならないような人たちと、寧ろいろいろ一緒に五月祭をやったりしていました。あるいは2年の時に Artin のガロア理論の本^{*14}と一緒に読んだんですけど、それも誘われる形でやりました。もちろんおそらくガロア理論をよく知っている人たちはいっぱいいたんだと思いますけどね。それをちょっと早めにやりたい、知らないでやりたい、という人と一緒にやったりしましたね。

——大学院時代や研究者になりたての頃の話をお聞かせいただきたいと思います。

古田：研究者と今言いましたけれど... 自分が自分のことを「数学者」って... ずっと呼べなかったんですね、なんかね、研究者とかね... 修士論文もどうしてそんなオリジナルなものが書けるのだろうというのがずっと謎だったし、何もないところからどうやって出てくるんだろうって...

ちょっと学部生の頃わからなかったことという話をしますと、最初に4年のセミナーというものをしたときに、セミナーというものがどういうことをするのかよくわからなかったんですよね。というのも教員の前で説明するんだけど、でも聞いている教員というのはもちろんそれを知っているわけですよね。それを説明するってどういうことなんだろうというのが理解できていなかったんです。自分がそれを理解できているという事を言えればいいのかな、それをわかってもらえばいいのかなとか。だからそこが全然わかっていなかったですね。セミナーというのはやはりそれをやることによって、能動的に研究をするということのある意味準備をしているんだと思います。今日も演習の授業がありましたけれど^{*15}、それも先のことと実はつながっているんだということを、学生の皆さんはもちろん知らないわけですけど、でもそういう事をできるだけ具体例をとって、わかってもらおうというのが1つの趣旨でした。それは自分がわからなかったからですね、4年生になってもわからなかった。

授業をちゃんと受けたかどうかは別として、授業のレポートというのは書かなきゃいけないわけですね。それで何かちょこちょこ考えるということがあって、それをレポートにして出せば単位がもらえそうだから出すということだったりしました。修士論文は2つの独立した内容を合わせたものを書きましたが、一つは、ある種の2次形式のある種の分類のような代数的な内容でした。でも代数的なものを考える動機はどこから来たかという幾何学から来ています。多様体に、例えば素数位数の群が作用しているような状況を考えると、コホモロジーある円分体上の整数環上のモジュールみたいなものと関係しているというか、そういう状況が出てきます。そうすると、その円分体の素イデアルをつかって、幾何学的に意味のある情報が出てくることがあるなと思っ

^{*11} 岩波基礎数学選書

^{*12} 藤崎源二郎「体とガロア理論」, 岩波書店, 1991

^{*13} λ 倍取りゲーム—ある石取りゲームをめぐる $I+T+F$ 数学セミナー 日本評論社 1983 年 連載

^{*14} E. アルティン「ガロア理論入門」, 東京図書, 1974

^{*15} インタビューは「集合と位相演習」の直後に行われました。

てレポートに書いたことがあったんです。全然大したことじゃなくて、2つのことを一緒にあわせて考えるとでてくることです。でもその延長上で考えていたことをまとめたものが修士論文の一つの内容です。

もう1つはゲージ理論と呼ばれるものに属するものです。簡単に言うと、例えば4次元球面 S^4 の上で、ある非線形偏微分方程式の解がどれくらいあるかというのを考えるというのを、Atiyah, Hitchin, Singer という3人の人の共著論文である場合にやっているんですが、それはその方程式がすごく対称性を持つんですね。球面って回転対称性もありますし、計量を関数倍するような conformal 変換という変換もあったりします。だから球面をユークリッド空間に1点を付け加えたものだとすると、ユークリッド空間上の平行移動だとか拡大だとか、そういうものを含むような変換が、この方程式を不変にする、そういう方程式があります。するとその不変性を利用して方程式の解を完全に決定できる場合もあります。それは Atiyah-Hitchin-Singer によってすでに知られていた結果なんですけれど、じゃあ S^4 でそれができるならば、 S^4 ほどの対称性はない、例えば $\mathbb{CP}^{2*16}$ だったら、どのくらいできるだろうというのを考えました。その場合はピタッと決まらないんですけど、ある常微分方程式に帰着されて、その常微分方程式を考察するというようなことをやって、それを修士論文にしましたね。でもそれは修士論文を書かなきゃというのでやった感じとは違って、色々考えている中で出てきたものを、「じゃあこれ修士論文かな」というような感じでしたね。

博士論文になったのも、博士論文を書かなきゃという感じではなかったですね。これはある日布団の中で目覚めた時に思いついたものです。そういうとんか劇的みたいですけど、やっぱり頭の中でずっとこう考えていると、朝起きた時も、起きたのか起きていないのかわからないような状況で、頭の中でグルグルとめぐるっていたりしますよね。そういう中で出てきたことで、アイデアは非常に単純なも

のです。でもその時のD論のアイデアというのは、例えば数年前かな、今アカデミックポジションについているような人たちのM論とかD論のネタと関係があったりもします。昔考えたことでも、そのある意味単純で本質的なアイデアというのは、その後もいろいろ使えたりしますね。

院生の頃と言いましたけれど、私はドクターには行かなかったんです。ドクターの頃の話といえば、私の最初の論文というのはすごく短いものなんですけれど、それがどこから来たかという話をちょっと言います。変換群論という多様体に何か群が作用するという分野がありますが、その分野の森本さん^{*17}という方と雑談していたことがありました。その方と初対面のときだと思いますが、どういう仕事をされているのかというのを聞いたんです。そうすると、次のような話をされました。まず6次元とか7次元の高い次元の球面には面白い群作用があるそうなんです。ある有限群が球面に作用しているのですが、どういう作用かという、固定点、つまり全ての要素で固定される点が、1点しかないんです。たとえば球面がユークリッド空間の中におかれているとき、ユークリッド空間への直交群の部分群の linear な作用だと、固定点は向かい合った-1倍の点とペアであられます。だから固定点が1点しかないことはあり得ない。でももっと一般の作用まで考えると、固定点が1個だけの作用というのが高次元の球面の場合にはあるそうなんです。そしてどういう群ならそういうことがおきるかという可能性もかなり分類されているとの話でした。でも、3次元、4次元とか5次元とか低い次元の場合は固定点1点の作用は知られていないと森本さんはいわれていたんですね。それを聞いて私は「でも4次元だったらそんなものないですよ」と言ったんです。というのはその頃勉強していたことを群作用の状況で考えると、すぐわかるような感じのことだと思ったから。そうしたら、「それなら論文にした方がいいですよ」と言われて、それで書いたというのがありましたね。でも実際に証

*16 複素射影平面

*17 森本雅治

明を書き下すためにはその時勉強していたことをただ当てはめるだけでは足りなくて、やっぱりちょっと何か工夫がいるわけですね。でもそのちょっとの工夫って、ここが問題だからこうすればいいなというような、問題にうながされて解決がそのまま見えるくらいのことだったんです。でもそれがずっと後になって、私が若い人と一緒にあることを考えている時に、ある事をクリアする時に、その「工夫」をこう使えばいいとか、さらにそのアイデアが別の人に引用されるだとかいうことがありました。

この経験を振り返ると、2つの面から述べる事ができると思います。自分の内側のこととして述べるなら、若い時でもどんな時でも、アイデアみたいなものというのはいろいろな形で将来的に役に立つことがあるという言い方もできます。あるいは外から大きく見て述べるなら、いろいろな人がいろいろなアイデアを持って、お互い影響を及ぼし合って、それが流れて、最初にどこがどうだったのかわからないような形ですごく生きている。それがきっと数学なんだろうなということも思いましたね。なかなかそれは見えにくいですがね。あるいは、集合と位相で言ったかもしれませんが^{*18}、Urysohnの補題というもの、そしてTietzeの拡張定理というのがありますけれども、Tietzeの拡張定理を本当に証明したのはUrysohnなんだそうです。だからそうやって、名前の付け方なんかはなんか違ってしまったりするかもしれない。でも、数学それ自体は、いろいろなアイデアが渦巻いていろんなものが組みあがって、巨大な建造物か都市のようなものになっていく。そうした一角に自分もいるんだなということをちょっと感じます。

あと、修論でやったことに途中で穴が見つかって、その穴を埋めるのが大変だった事がありましたね。夜も本当に必死で、とにかく埋めなきゃいけないから... でもそうしていると他の人の論文にも「あれ？

これも穴じゃないかな」というのに気づいたりして(一同笑)、そういうこともありましたね。今ふと思い出ただけですけれども、間違えたかもしれないと思って夜寝られなくなるというのは結構あることです。特にアナウンスしてしまうと、アナウンスした後でそれが間違っていたとなったらなかなか取り返しがつかないから大変、というのがありますね。

D論は、当時は短縮終了みたいなものもなくね。D論はできていたんだけど、そしてドクターの課程ではなかったんだけど、やっぱり学位を取るのは他の人と同じ時ということになぜかなくなっていましたね。別にそれはそれで全然いいんだと思うんですけど。アメリカなんかではPh.D.というのはこれから研究者をやる資格があるという立場のことです。だからPh.D.を持っているのと持っていないというので少し違う感じですね。その時はOxfordに行く予定があったので、それは学位を取ってからということで行きました。いろいろ思い出したことを行き当たりばったりに喋っているだけですみません。

——Oxfordにはどう言った経緯で行くことになったんですか？

古田：ICM^{*19} Berkeleyというのがあったんです。そこでDonaldson^{*20}という人とちょっと話をして、それで来ないかということで、イギリスの何かのfundで呼ぶということで、1年目はそれで行きました。その後それを延長するために、確か日本の方で学振^{*21}か何かでお金をなんとかしたんだったと思います。だから、最初に行こうと思って応募したというのとはちょっと違う機会でしたね。

——研究者なら行くことも多いと思うんですけど、学生でもICMに行くんですか？

古田：

行くと言っても何かを発表するとかではなく、ただ聞きに行くだけですけれど。あれは初めての海外で、全くとのおのぼりさんでした(一同笑)。森吉さ

^{*18} インタビュアーは昨年、古田先生の「集合と位相」を履修していました。

^{*19} International Congress of Mathematicians

^{*20} Simon Donaldson

^{*21} 日本学術振興会

^{*22} 森吉仁志

ん*²²という名古屋大学の方がいますけれど、一緒に珍道中をした感じでしたね。ICMの前にSatellite Conferenceが代数トポロジーであって、それに去了ました。あれはどうして行ったのかちょっと覚えてないですが、少しずつ海外に行くのにいろいろなお金が使えるようになってきた頃でしたね。でもあの時は私費でいったのだったかな。今は本当に気軽に海外に行けますね。Zoomとかもあるし。

——ICMという、ICM北京で招待講演者として発表されたと思いますが、参加者としてICMのに行く時との気分の違いや思い出はありますか？

古田：あれは本当に気が重かったですね（一同笑）。私はそもそもいろいろな発表で気が重い方で、研究集会でもだいたいその前日は徹夜で無理やり準備をして、そして当日は睡眠不足という感じです。ICMと言うとなんだかすごく大きいみたいですけれど、ICMでもいつもと同じそういう感じで、あんまりちゃんと話せた感じはなかったですね。やっぱり自分なんかこんな所でそんな話をしているんだろかというのがまず先に立ってしまって。その点、人の面白い話を聞いているだけというのは楽ですね。

中国に行った時はICMよりも、その前のSatellite Conferenceで西安の大学に行ったりしたんですが、その方が印象的でした。暑いせいか学生の方達が外で勉強してるんですが、みんなすごく熱心に勉強している。それからこれはおそらく中国の政策だと思いますけれど、ICM北京の時に、話を聞いているといきなり若い高校生ぐらいの学生たちがワーって入ってきて「サインしてください」って言うんですね。それはおそらく研究者と気軽に接する機会を作ろうとかいうことだったと思いますけれども。全然インタビューにふさわしい話じゃないですが（一同笑）、そういうことは印象的でしたね。

数学としては... すごいもののすごさというのは、その頃には当たり前すぎるんだなと思えるようになっていたので、逆に言えばそのインパクトは少なかつたかもしれないです。昔はすごいもののすごさの、その果てというものが全然想像つかないわけで

すね。いつになっても想像つくとは言えませんが。例えばそのICM Berkeleyに行った時の、最初のSatellite Conferenceでは、Goodwillie*²³という人が話をしたのを覚えていますけれど、中身は当時は全然知らない話でしたね。こんなことがあるのかというのの一つずつがもう驚きで、そういうものを浴びるという感じでしたね。当時はarXivというのはなかったんですけど、おそらく今はarXivでいろいろな論文が見られたり、色んな噂が来たりしますね。そういう時代にいるからそれで暮らすしかないですけどね。

私には娘が2人いて、そして私がアメリカに滞在している時には一緒に来たりしたわけですけど、外国に暮らしたことがあるためか、外国に対する憧れが子供のときの私に比べるとあんまりないみたいです。若い方たちは皆さんも含めてだんだんそういう風になってきたのかもしれないですけど、昔は海外というとあまりにも遠いから、ここでない世界というのがどういう風なんだろうって、私は自然に思っていました。そうした遠くの未知の場所と、数学の世界で今の自分が知らない場所、達していない場所がどこか重ね合わさるような感じがしました。宇宙のかなたを想像するのとも似ていたかもしれない。もっとも今の若い皆さんには物事が等身大に見えるようになっているということかもしれないですね。でもある種の憧れというのはあってもいいと思います。外国に対してではなくて、数学に対して。数学だけじゃないかもしれません。

ここまでいろいろ自分と外との関わりについてというかな、授業とかそういう話をしていました。憧れ、という言葉を使ってしまったので、ちょっとその逆のこともいっておきたいです。憧れではなくて逆に、どうして数学をやらざるを得ないような気になっていたかというところと言うと... 「わからないということが耐えられない」という耐えがたさがあつたような気がします。例えばですけど、物理でpath integral (経路積分) という概念があつて、しかしそれは正当化できていない。正当化できていな

*²³ Thomas Goodwillie

いけれどなぜかそれから導かれわかることがあるという。そのような事態が存在してしまっているんだろ。例えば数理論理学とかを少し覗くと、Gödelの不完全性定理だとか連続体仮説が正しいのか正しくないのかというところで、誰でも一度は悩みに悩むと思います。それと似たような、それに相当するようなものがいくつもあったというに通じるでしょうか。あるいはもうちょっと一見小さなことと言うと、皆さんフーリエ変換ってご存知ですよ。それは無限次元のベクトル空間で2通りの基底があるという言い方もできます。でも私はあれが不思議なんです。その不思議さというのをうまく説明できないのだけれど、その正体がどうしてもわかった気になれない。未だにですね。それがすごく居心地が悪いんですね... ほとんどトラウマになるぐらいと言うと言い方が不適切かもしれないですけど。それを何とかしなければ... 落ち着いていられないというか... この焦燥感は、普段の生活が繰り広げられる周りの世界とは関係ないし、ましてや数学者としてのキャリアとかそういうものと全く関係ないです。しかしそういうことが昔は自分にとってとても大きかったですね。

でもこれは何か哲学的な深淵ことではなく、むしろ心理的、精神的なものと重なっていた、あるいは年齢的なものともだとも思います。これとパラレルなことはいろんな人にいろんな形であると思うんです。あんまり表立ってそういうことは言われなくてもいいですけどね。今の年齢になると、トラウマというような形とは違うものになってきています。そのように変わったのは、それとは別のものが現れてきたからとも言えるかもしれません。やっぱり結婚して子供ができて、そして例えば学生の皆さんが自分の子供よりもっと年下になったとか。あるいは数学というものはいろいろな概念が絡み合っていてきていると言いましたが、いろいろなものが絡み合う中に、数学だけでなく物理だとかそういうものも含めて見えてきて、いろんな方たちのいろんなスタンスに接する経験を重ねてきたことだ

とか。今は、必ずしも常に居ても立っても居られないという感覚ではないですが。

今これを話したのは何故かという、先ほど憧れと言いましたが、憧れというようなある意味キラキラしたものへの嗜好ということではなく寧ろ、ある種の耐えがたさみたいなものが衝動として働くという場合もきっとあるだろうし、そういうものが複雑に入り混じっているというケースが結構あるんじゃないかと思って、その例として自分の場合を言いました。

あんまり、というかほとんどこれは人に言ったことがないです。あんまり言いたくないことでもあるし、あんまり言っても伝わらないんじゃないかと思うことでもありますね。こういうインタビューみたいな機会はこれからもうないかもしれないし、もうすぐ定年ということもあって、伝えられることは伝えなきゃという気持ちもいろいろなところであります。置き土産みたいな感じです。

——11/8 予想関係の仕事や、いろいろな方と共著で書かれている、physicist friendly な事を mathematician friendly な形に書くというような最近の論文は、先ほどおっしゃっていたような耐えがたさと関係していますか？

古田：ええとまず、11/8 予想のことと最近の物理とこのことの2つは別々です。またどちらも、さっき言った耐えがたさとも実は独立しているんです。まず私は基本的に「わからないことをわかりたい」という感じなんですね。ある現象を理解したい。だから問題を解きたいとか、あるいは理論を作りたいというのとも違って、そのもっと手前のすごく素朴な、ちょっとした子供がこれなんだろうという感じで、現象のからくりがわかりたい。逆にカラクリが分からないと、不安だったり、すごい不思議だったりする感じです。

11/8 というのは、たまたま Kronheimer^{*24}という人の講演の記録を読んだんですね。当時は Seiberg-Witten 理論というのが出てきた頃で、文献というのがあんまりなくて手書きのものが行き交ってしま

^{*24} Peter B. Kronheimer

た。それで誰かのノートがたまたまコピーされてきて、読んだら、あるところまではわかるけれどもあるところからわからない。「これ本当に成り立つのか?」という感じがあって、それが出発点でしたね。これというのは、非線形偏微分方程式の世界ですけど、簡単に言うと無限次元の幾何学のようなものです。それを普通の代数トポロジーの道具みたいなものを上手くあてがって理解しようとしているわけです。それでもしこれが本当に成り立つならば、この無限次元のモデルで有限次元の似たような状況を考えれば、それにも当てはまるはずだ。だけど、そこで反例があるんじゃないか、というのがまず最初の発想でした。そこまではわかったんです。つまり何がわかったかという、もし無限次元と同じような状況を有限次元で作れたとすると、Kronheimer の議論はそのままでは上手くいかないけれど、しかしある特定のところまでは上手くいくんじゃないかということです。

急いで訂正すると、私の手元にあったものは手書きのものだけだったので、Kronheimer がそういう風に主張したと書いてあったと思い込んだんですけれど、後で人に聞いたら Kronheimer はこういう議論が正しいとまでは主張していなかったらしいんです。私はそれをわかっていなかったから、Kronheimer はこれを正しいと主張したと思ったけれど、成り立たないのではないかと、その代わりこれが成り立つんじゃないかと思った、という話ですね。それはまだ speculation で、path integral じゃないけれど、「もし無限次元の状況を有限次元で近似できるんだったら」という議論だったんです。

無限次元を有限次元で近似するというか、無限のものを有限のもので近似するというのは物理のくりこみというもので出てくるものです。あらゆる状況について積分しようすると、運動量の大きさが 0 から無限大まで考えないといけなくて、そこで積分すると発散してしまう。そこで、有限のところできりあわせて積分しておいて、そしてこのカットするところを段々大きくしたい。その被積分項には例えば電荷とか質量とかのパラメータがありますが、実はこの中に入っているパラメータも動かしな

がら極限を取るとなぜか物事がうまく収束してくれます。簡単に言うとそういうようなものです。さっき言っていた無限次元のものを有限次元にするというのは、私には「くりこみの topological version」のように見えたんですよ。そう思うと、それは面白い。

でもそれがそう簡単にできると思わなかったんです。Trieste というところに数理物理学の研究所があるのですが、何でだったかそこであった集會に招待されました。だから何か話をしなきゃならないわけですけど、その飛行機の中で有元次元で近似するというのが本当にできるかなと思って、それまで試してなかったけれど試してみたいんです。そうしたらなんと簡単にできてしまった。やっているのは簡単なことで、言ってみれば「陰関数定理を定量的に行う」ことです。陰関数定理とか逆関数定理というのは、微分したものが可逆だったら、1 点の近傍で非線形なものは可逆だっていうことですよ。その近傍の大きさは、もともとの逆関数定理では指定されていないけれど、それを大きさ付きで考える感じです。だから、状況が良かったら実はこの大きさをいくらでも大きくできる、というような議論をその時考えたんです。そしてさらにそれに K 理論を適用するということを、それはその前に考えていたのかな、それとも Trieste に着いてから考えたのか、まあそれを Trieste で話したというのが 10/8 定理と今はいわれているものですね。でもその結果が知られているかどうか分からなくて話をする前はその無知が心配でした。自分のやったことというのは大抵簡単に思えて、誰かがすでに考えていてもおかしくないように感じたりするものです。だから、Trieste から Kronheimer に E メールをして、「こういうことができたけれどこれは知られていますか?」と聞いたたら、それは「自分の知る限り知られていない」という事でした。Kronheimer が知らないということは、知られてないということで(一同笑)。Trieste の研究集會の部屋でノートに向かってさらに先に進めるか考えていたら、Dan Freed という人がやってきて、「Kronheimer から聞いたんだけど、こういうことができたって本当か?」と言うから、「それは本当に、それよりもちょっとよくできないか今考えて

いる」と言って、その翌日か翌々日の講演でその話をしました。その時すでに明らかだったのは、有限次元でものを考えるという、言ってみれば topological なくりこみみたいな考え方をすると、そのシステムそのものが不変量になるというものの見方でした。そうするとホモトピー論と無限次元の幾何学が交錯し、この見方でいろいろな新しいことが出るんじゃないかな、ということをやっと思ったりしましたね。でもその時でもやっぱりいろいろわからないこと、わからなくて不安なことというかな、居心地が悪いことはいろいろありました。例えばなぜその方程式なのか。今言った議論というのは、方程式の形はあんまり関係ないんですね。方程式って map ですよ。その map がある意味ほとんど proper、つまりコンパクトの逆像がコンパクトに近いような性質を持つだけで良くて、方程式の具体的な形はあんまり関係ないんです。使うのは今の性質と定義域と値域が何であるか。つまり出てくる bundle が、vector space が何であるか、そのくらいしか関係しない。でもなぜこの特定の形をした方程式なのか、というのが不思議で、それもその時に考えましたね。そうしたら一応こういうことかな、とか思ったりしていうか... やっぱりそういうのは話し出すときりがないのでやめておきます。まあこれが 10/8 とかのことです。

つまり Kronheimer の議論というのを、わからないので考えました。そしてこれがもうまくいけばこうなるはずだけど、というところがすごく難しいと思っていたんだけど、やってみたらそこまで難しくなかった。でも実際に論文で発表したものは当時の議論ではなくて、それをさらに簡易化した形ができたんですよ。でも簡易化してしまうと逆にその当時のアイデアは失われるわけです。その当時のアイデアはきっと有用だろうと思っていますが、まだそれはどこにも書いたことはないですね。

一方、最近の物理の方達との話はまた全然別です。

物理と数学が研究者たちの間でもある程度近くなることというのは、例えばこれは昔、超弦理論でいろいろな duality というのが出てくるちしばらく前にありました。日本だと佐藤理論というのがあって、それと conformal field theory との関係とか、あるいは可積分系との関係とか、あるいは代数幾何で出てくるリーマン面のモジュライ空間と conformal field theory のある種の構成の仕方との関係とか、その辺りで日本でいくつか集会が開かれていました。それは自然に生じたものとはちょっと違いました。上野健爾さんという方が中心になって主催していて、closed で、自分が呼びたい人を物理の方でも数学の方でも選んで集めるという感じというものでした。それが昔一度あったことです。一方、それとは別の潮流として、物性物理の方で現れるものと数学とが割と近いというのが、最近といっても 10 年 20 年の話かもしれませんが、わかってきていて、これは私は知らなかったですね。それである時知ってびっくりしました。何にびっくりしたかと言うと、bulk-edge 対応というのがあると聞いて、びっくりしましたね。ある特殊な絶縁体では表面 (=edge) だけが導体になっている現象があり、その現象の由来は絶縁体の本体 (=bulk) の中に直接は見えない形で存在している、というものです。導体になると言っても、本当の電気よりはスピンの流れだったりしますけれど。その現象の数学的定式化と証明とかもあるわけですが、私は初めは全く理解していませんでした。何年か前に河東さん^{*25}が主催している Summer School 数理物理で bulk-edge の話題もしたいということがあり^{*26}、それを説明する話ができないかと私に打診がきたんですけれど、「それは理解していないので話せません」と言ったんです。本当にその時全く理解していなかったんですね。でもその後理解できたんですよ^{*27}。そうすると、数学の割と古典的な所とちょっと結びつくようなことがあるとわかりました。それでその頃まだドクターの学生にそれを勧め

^{*25} 河東泰之

^{*26} 2014 年 Summer School 数理物理 「トポロジカル相の数理」

^{*27} 2017 年 日本数学会企画特別講演 「トポロジカル相とバルクエッジ対応の数学的側面へのイントロダクション」

^{*28} 小谷元子

て、学位を取った人もいます。小谷さんという方がいて^{*28}、その頃その方が1つ大きなプロジェクトをしたいということで、それにトポロジカル相関係で参加しないかということで参加してしてしまったんですけれども（一同笑）、私は本当にプロジェクトとかそういう柄じゃないんです。旗振るようなのは本当に苦手というか、できないんですけれども、でもそうするといろいろな人、特に物理の人と会うわけです、それでいろいろな話を聞くわけです。その小谷さんのプロジェクトはいくつか班があって、そしてそれとは別にそのプロジェクトで公募で採択する形の幾つかの参加グループもあったんです。そしてそれら人たちが一堂に介して自分たちがやってきたことを説明するということをやったんですね。そこで公募班のひとつのグループの大阪大学の物理の深谷英則さんという方が話をされて、それが物理学者にフレンドリーなAPS境界条件だったかな、そういう話だったんですけれども、それはちょっとびっくりしました。というのはある公式が成立するというのですけれども、全く知らないタイプの公式だったんですよ。一応APSというものはとりあえずどういうものか知っているつもりだったので、こんなことが物理でわかるのかというのはちょっとびっくりしました。ただそこで説明されたのは物理的な動機に基づいた物理的な証明であり、ユークリッド空間の場合に本当に計算するとどうかという側面が大きかったんです。だから計算といってもガチャガチャ計算するのではなく一番本質を押さえるようなことで、bulk-edge というのと非常に関係があるものでした。そこでなぜそれが成り立つんだろうと不思議に思って考えたんですよ。やっぱりからくりを知りたいので。

それはどういう話かと言うと、たとえば4次元の空間があって、その境界として3次元の空間があるとします。適当に境界条件を置くと、4次元上のDirac方程式の解を考えられたりするんですけど、その解の次元を、簡単に言うと4次元上の何かの積分と3次元の境界からの寄与の和で書くような公式、それ

がAtiyah–Patodi–Singerの指数定理と呼ばれているものです。そのAPSの指数定理で一番面白い項は、境界の3次元から出てくる寄与でエータ不変量というものです。物理の方たちは、指数を全然違うやり方で表現する公式を与えていました。その公式もエータ不変量をつかうんですが、どこが違うかというと、もとのAPS指数公式は、境界の3次元空間のエータ不変量をつかうのですが、物理の方たちの公式では、4次元空間のエータ不変量をつかうんです。ちょっと得体のしれない公式だったんです。物理の方たちの議論の背後に見え隠れしてそうなものがあります。もともとエータ不変量というのは何かの境界の上で考えるタイプのものです。だから、彼らが考えているのは4次元だけだけれど、なんだか5次元のものが背後にあってもおかしくないような議論と感じられます。でも彼らは5次元を持ち出さずに、4次元の上で直接議論を与えています。ではこの背後にあるはずの1次元高い5次元とは何だろうと考えたんです。すると、ああ、それはこういうことじゃないかと思ひ当たるものが見つかった。見つかったのはその話を聞いた次の日か2日後です。3次元4次元5次元にまたがる議論です。そういう思い付きはだいたい間違っていることが多いんですけれども、でも何だか確からしいのでメールでコンタクトを取って、それで共同研究が始まりました。

そのアイデアを深めて考えるのに、他の方たちも巻きこまれてもらいました。深谷英則さんは共同研究者として二人別の方がいて、私の方はということと関わりがある人として松尾信一郎さんという人と山下真由子さんという人を誘ってその論文を書いたというのが出発点ですね。その後、その次とそのまた次というのをやってるところで、その過程でいっぱい勉強になりました。勉強させてもらったというか物理の方に教えてもらったというか。彼の専門は格子ゲージ理論というもので、クオークだとかは私はよくわかりませんが、QCD^{*29}の色々な計算をスーパーコンピューターを使ってやったりと。スーパーコンピューターをよく使う方です。それでどう

^{*29} Quantum Chromodynamics（量子色力学）

計算するかというと、連続なものを離散的なもので近似するんですね。

そこでもう一つ驚いたことに会ったんですけれど、それは離散的な世界で指数定理と呼ばれるものが知られているんだということを知りました。指数定理というのは、連続な空間の上の線形偏微分方程式の解の次元を topological に表したりするものです。偏微分方程式の解と言いましたが、正確に言うと、左側と右側に2つの無限次元のベクトル空間があって、その間に左側から右側への写像があるとします。その kernel とは右側にいくと0になるものですね。この写像が行列で表されるとすると、その行列の転置行列というのは逆の方向の右側から左側への写像を定めています。例えば左側が2次元のベクトル空間、右側が3次元のベクトル空間とすると、 2×3 とか 3×2 の行列が写像としてありますよね。転置行列のほうでも kernel を考えます。だから kernel は右側と左側にあります。両者の次元の差というのが指数です。ところで転置行列の rank ってもとの行列と同じですよ。少なくとも有限次元ベクトル空間の話なら。それで解の次元は何かというと、左側のベクトル空間の上の解の次元というのは、左側の次元引くことの左側から右側への行列の rank。右側も、右側の次元引くことの右側から左側への行列の rank。ふたつの rank が同じだから、両者の差は、要するに左側の次元と右側の次元の差と等しくなります。つまり、行列が何であろうと、有限次元の場合、指数というのは左側のベクトル次元と右側のベクトル空間の次元の差なんです。無限次元の時は何をやっているかということ、無限次元引く無限次元ということをやります。だから直接はできないのだけれど、この間に何かある写像があると、それを經由することによってあたかも左側の無限次元から右側の無限次元を引いたものができる。面白いのは、左側の無限次元ベクトル空間と右側の無限次元ベクトル空間が全く同じ空間だったとします。例えば生成元が0番目、1番目、2番目、3番目、... という生成元を持つようなヒルベルト空間です。その時左側から右側に「1つずらす」という写像がありますね。つまり、0番目の基底を1番目に、1番目を2

番目に... すると、左側から右側に単射があります。でも右側から左側へ行くものは、0を潰してしまうから kernel が出てくる。つまり kernel の次元の差だと思うと、この2つをベクトル空間の次元の差が1になります。だけど2つのベクトル空間は全く同一のベクトル空間なんです。これは無限次元だから初めて生じることです。つまり、自然数全体の集合に1個要素を付け加えてもやっぱり濃度は変わらないという感じですよ。だから今言った指数というのはすこぶる無限次元的な現象なんです。有限次元で指数というのを考えると、左側と右側が同じだったら0しか出てこない。

もう一度今の話はどういう話だったか振り返ると、深谷英則さんという方から一つ最初衝撃的なものを聞いたけれど、それは数学で1次元高いものを考えると説明できた。その説明の仕方自身、物理の方にもきっとある種のインパクトがあったのではないかと期待していますが、それとは別に、深谷英則さんたちが当たり前にやってる世界の中で、離散系の格子の上の指数定理というものがあって、これにすごい仰天したという話を今しています。それでどうして仰天したのかという話をしてるのだけれど、簡単にいうと、そんな離散系だったら指数なんていうものは普通に考えたら0しか出てこないような気がするんです。離散系というものは有限次元で近似するんですけれど、有限次元で同じものの差だったら0しか出てこない。だから指数というのは本質的に無限次元的な現象だという風に思っていたんですね。ところが有限次元で何か出てくる。それでびっくりしたんですが、まずそれを知らなかったということにびっくりしました。調べてみると、2000年ぐらいに数学的に厳密に、連続的な例えばトラスを離散的に格子で近似すると、そのトラスの上で普通の指数を考えたものと、有限で近似したものの上で格子ゲージ理論で考えられているような指数を考えたものとは、出てくる指数が同じだという結果が証明されていました。全く知らなかったです。でもその証明というのは、簡単に言うと物理的な証明であって、物理というのはつまり積分とか実数を扱う計算を使うんです。それだと2つの実数を比較す

るということではできるけれど、例えば modulo 2 みたいなもの、つまり $\{0, 1\}$ に値を持つようなものを比較するということは、積分をいくら操っても出てこないわけですね。指数というのはいろいろな変種があって、 $\{0, 1\}$ に値を持つような変種だとか、族というものを考えるものとか色々あるんです。だからその証明は一般的な場合には通用しないようなものでした。ちょっとだけ一般化した場合にできるとアナウンスした人がいるんですけど、その論文はついに出ていなかった。それが 2000 年代です。そこでそれを考えたんですね。一般的に通用するような証明を考えたというのが割と最近のことで、これは今、論文が準備中です。

だから最近の物性物理と関係のある研究の動機は、自分の居心地の悪さではなくて、物理で知られていてびっくりした。そしてびっくりしたことを何とか自分の立場で理解したかったということですね。でもそれと並行して、そういうことができるならば自分の本来の分野でこういうことができるんじゃないかという一種の夢みたいなものも広がっていきます。先ほど 10/8 定理で、有限次元で近似するというのが topological なくりこみみたいなものだという風に個人的には思っていると言いました。この格子ゲージ理論で出てきた離散的な系における指数というものも、連続系じゃなくてある種有限のもので考えるということなんです。ただで両者の有限化というのはとりあえず似ても似つかない。でも標語的に言うならば、その 10/8 定理の場合出てくるものは、量子力学で言えば、言ってみれば運動量空間の方でカットする感じなんです。一方、格子ゲージ理論の方で出てくる有限化というのは、空間のレベルで何かを有限にするというもので、両者は双対っぽい感じです。一方でできることはもう一方でできてもおかしくない。ちょっとそういうことを今考えていますが、それがもしできたら色々その先にありそうなんですけれど。だからたった今の原動力というのは居心地の悪さではなく、思いがけないものに接したこと、それならばこういうことができるの

ではないか、ということです。途中かなり脱線しましたけれど（一同笑）。

——少し話が戻りますが、若手研究者の頃は自分を数学者と言えなかったとのことでしたけれど、その転換期というのは耐えがたさに囚われなくなった時ですか？

古田：おそらく自分が学生に責任を持たなければならなかったことがあると思います。つまり自分が数学者かどうかとかそういうこと言っていられないというか。

別の側面もありますね... なぜ自分が数学をしているのかということをやっぱり考えてしまうというか... わかりやすい言い方で言うと、数学以外のことにも色々興味があったという言い方もできますけれど... いろいろなことがある中でどうして... 自分が数学者と言えるのか... いろいろなことというのは、あんまりこう言うと一つだけ突出してしまうみたいで良くないんですけど、物事のからくりがわからないと気が済まないっていう例だと、数学以外にもありました。Husserl^{*30}という哲学者がいるんですけど、その人の議論の最初のところがどうして成立するのかというのが本当にわからなくて、というか謎で、それで Husserl の本を読んでいたこともあります。だからそれは自分の中ではあまり変わらない。数学でなにか考える時とそんなに変わらないかもしれないわけです。

一方数学は、例えば修士でどういう風に修士論文を書いたのかとかを言いましたけれど、あんまり自分が能動的にやった感じがなかったんです。たまたま何か向こうからやってきたものに反応したというか、それに過ぎないんじゃないかというのがありました。伽藍堂があって、何かがやって来るとそれがガラランガランと響くだけじゃないかっていう、なんかそんな感じというかな... があって。やっぱり数学者っていうのは、自分はこれはこうやってこうやってああするとかそういう、数学者に限りません、あるところで人が大人になるというかな、自分はこれを身をもってやるんだっていう。そういう風になれ

*30 Edmund Husserl

ていないんじゃないかと言ったらいいかな... なかなか説明しにくいですけどね。それでいろいろなものがある中で、たまたまその数学... をやっているという形になっていて、そしてたまたま修士論文というのを書いてたまたま職を得ているけれど... そうですね... 自分が本当に「これをやろう」という感じでどこまでやっていたのかというのが、それがちょっと自信がなかったですね。ちょっとわかりにくい言い方で申し訳ないですけど。

そして今こう言っていますけれど、こういうことってあんまり人に言えないっていうか人に言っても伝わらなそう思えないし、特に昔は。でもこれは何というかな、すごく簡単に言ってしまうと、ある時期よく言われた言い方をつかうなら自分探したとかそういうものの一つという言い方もできるかもしれないですけども。でもそのうちそう言っていられなくなるわけですね。全てをグッと飲み込んで、「本当はいろいろあるんだろうけどな」と思いながら学生に「こうである」と提示しなきゃならない場面とか言い切らなきゃならない場面とかがあるわけです。それが違っていたら、それは違うかもしれないけれど、その責任をなんらかの形で取らなければいけない。どっちつかずなことを学生に言っても学生が迷うだけです。それはあんまりやってはいけないことです。だから数学者と言えようになってきたかどうかかわからないけれど、そういうことはあんまり考えないようにしてきたのは、やっぱりそれよりも、「どうやって責任を果たすのか」ということを考えるようになってからかもしれませんね。例えばたった今だったら、自分の中にあるものをどうやって有用な形で若い皆さんに渡せるのかなということを考えながら話しています。あるところは伝わるだろうし、あるところは伝わらないだろうけれど、それでも何か言っておくといいかもしれないということがあると思うので、どうしたらいいだろうと思いが

ら喋っているという責任の持ち方ですかね。

何かから自由になるというのは、何かを解決してしまうというより、それが問題にならなくなるからという解決の仕方が心理的に言って結構あったりしますよね、ある悩みとか。自分を数学者と言えのかどうかというのもその一つのかもしれないですね。似たようなこととしては、何年か前にコロナ^{*31}のちょうど始まった頃に、東大数理で専攻長というおおよそ持ち回りでやらないといけない、全然向いてないものをやりました。その時に、卒業生に対して何か言わなければならなかったことがあるんですけど、でもコロナだから対面で言うという機会がなかったのでそれは文章で書いたんですよね^{*32*33}。学部卒業生と、修士博士の院の卒業生と、各々書かないといけなかったんですけども、何を言ったらいいかなと思っていたら、「明日これ出さなきゃいけないんだけど」という（一同笑）。いつもと同じですけど徹夜ででっち上げるというやつですね。まずこれを言った方がいいと思ったのは、「皆さんがどういう所に立っているか」ということを一教員から見るとどう見えるかです。学部を出た人がこれまでどういう経過を辿って今卒業に至ったのか、あるいは修士博士でどういうことをやってきたのか。「あなた方がやってきたのはこういうことなんですよ」、「こういう達成をしたんです」ということを伝えて、「確実に確かに何かやったんだ」という風に思っ

て欲しかった。でもその次に、「その先」ですよ。学部生だったらその先に何が待ってるのか、修士ドクターの人だったらその後どうい

^{*31} 新型コロナウイルス感染症 (COVID-19)

^{*32} 古田幹雄「学位記授与式祝辞」, 東京大学大学院 数理科学研究科, 2020, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/kyoumu/11856a071aa06cce122ee117b45c2a3a3c7732be.pdf>

^{*33} 古田幹雄「学位記授与式祝辞」, 東京大学大学院 数理科学研究科, 2020, <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/kyoumu/5d8c24abb32df1e600c62790fc31b7f3906cc21a.pdf>

たりすること。狭くならないということですね。もう1つは、一種の初心というかな、それをいつまでも忘れないということです。それをドクターあるいは修士を終えた人には言いたいと思いました。ちょっと急いで付け加えると、初心のようなものをいつまでも持っているといいというのは、神保さん^{*34}という人の書いたものを読んだ時にしみじみと思ったことです。「数学のたのしみ」という雑誌が昔ありました。その「夢絃游言」という一番最初にあるところに書いてあったもので、すごく印象的な文章がありました^{*35}。それと全く重なるわけではありませんけれど、その一つに「自分は何が楽しいのかということをやっぱり振り返ると良い」ということが文章に出てきて、私がそれを言うよりもおそらく皆さんがそれを読まれるといいと思いますけれど、それを書きました。あと学部生の人たちに対しては、学部生の方達というのは、その後修士博士に行く人もいれば、そうじゃなくて企業に行く人もいるし、様々ですね。そういうところでいろいろな人に出会うわけですが、私自身がそういう勉強を終えたと言っているの後に、こういうことに出会ったというを事を一つ例として書こうと思ったんですね。それは皆さんもこれから先、これまでの勉強とは違うようなあり方というのを実際に見たり接したりするだろうと思って。

どうしてこんな話をしているかという、さっきこういうことを言いました、何かから自由になるということは、何かを忘れるということで為される事があるんじゃないか。そこに書いたことがその1つだと思わなければならないけれど、それはOxfordにいた時かな、その時BonnのMax Planck Institutesという所を尋ねることがあったんです。そこで会ったある日本人の数学者に「君の夢は何ですか」と訊かれたんですね。それでそれにすぐ答えられなかったんですね。誰かって言ってもいいかな、齋藤恭司さんだったんですね。齋藤恭司さんという方は、多変数の特殊関数論というのを作るというのが... 夢

だった... でもただそう言うだけじゃなくて、もちろんいろいろな背景はあるわけだけれど。そういう意味のことをその時言われたのか言われてなかったのか、ちょっと覚えていないですけど。でも齋藤恭司さんほどの人がごく当たり前にそういう風に訊いてきたということ、まずそのこと自体がすごく印象に残りました。あんまり訊かないですよ、そこまで親しくない人に「あなたの夢は何ですか」というのは、でもそれは数学をやる上でとても本質的なこととして、日常会話として訊くという感じのものでした。その話しぶりもすごく印象的なんです、真似できないし。齋藤恭司さん自身は覚えているのかわからないし、別に大して意味があって言ったことではないのかもしれないですけど、言われた方はムッて考えてしまう。それから何年間もその言葉というのは折りに触れて振り返られました。学部卒業生の人たちに書いたのは、何年間に振り返られていたんだけど、そのうちそんなにそれが頭に登らなくなったということを書いたんです。それは、その問いが重要でなくなったからではきっとなくて、おそらくその夢という言葉がもっと具体的なものとして、いろいろなレベルのいろいろなことがあって、その中を自分が動けるようになったからかもしれない。だからもはやそういう十把一絡げに夢という言葉で指し示したり掴んだりして考えるということが必要ないというか、不適切になったからかもしれない。ある分野で夢としか呼べないようなものがあるかもしれないし、自分の中でそういうものがあるかもしれないし、でもそれにあるやり方でアプローチすることができる部分とできない部分があるかもしれない。そういう構造を持ったものとして、ある種の夢という構造体が立ち現れてくると、そうするともう「夢は何ですか?」というのはかなり粗雑になりますね、逆に言うとな。でもそういうものが全然ない所ではまずそれをバーンと投げかけるというのが大事かもしれないけれど。これがだから、何か意識にそんなに上らなくなるというのは実はある自由

^{*34} 神保道夫

^{*35} 神保道夫「盆栽」, 「数学のたのしみ」, no. 7, 1-2, シュプリングー・フェアラーク東京, 1998

を達成した時かもしれない、という一つの例かもしれませんけれどね。

「明日までに何か書かないといけない」という時にこうやって徹夜で何か書くわけですけど、そういうのは他にもあります。今こう話すのとは別にそういうところに書いてあることもあると思いますけれど、例えば東大数理のパンフレットというのがあって、そこで幾何関係の説明を幾何班の班長が書かないといけなかったの、何年か前に班長だった時に書いたんです。そうしたら毎回それが使われていて、今年班長なんですけれどまだそのままで、またそのままだにしましたけれど（一同笑）^{*36}。でもそれは幾何というものを、どういう風に捉えられるのか、あるいは私が捉えているのかということ、あるやり方で説明してあると思うんですけれどね。まあそういうことはここであんまり繰り返す必要はないという、繰り返さない方がいいと思うのでやめておきますけれどね。とりあえずそんな感じですかね。

——先ほど 10/8 不等式についてはいろいろとお聞きしましたが、もっと一般に、大きな研究成果に到達するための古田先生の方法論のようなものはありますか？

古田：... まず第一にそんな大きな成果を出していないと思います。大きな成果というのはおそらく、ある理論体系を分厚く積み上げていくとか。つまり何を以て大きな成果ということなんですか。長くなりがちなので短い言葉で言うと、私は基本的に目の前のよくわからないものが「何かな？」という風に考える、やってきたのはほぼそれに尽きると思います。ただそれが、いろいろなところと関係しているというのが見えてくることがある。でも他の人には見えていないことがある。そういう時にそれは成果と呼べることがあったりしますね。私が自分のことをなかなか数学者と呼べなかったというのは、私の在り方のそういうところとも関係していると思います。「ただあるものが見えているだけなのに」という感じかな。

例えば先ほど格子ゲージ理論の方で、こんな不思議なことがあるって知らなかった。それが衝撃的だったと言いましたけれど、後でそれはある形で納得したんですよ。それは、具体的なことをあんまり言っても仕方ないかもしれませんが、K 理論と呼ばれているものがあるんですけど、位相的な K 理論と呼ばれているものがあるって、その理論構成にはいろいろないくつかの登り方があるんですよ。その中の一つの登り方が実は格子ゲージ理論で出てくる指数定理とすごく相性がいいんだということが、わかってというか、そういうことを納得しました。そうすると位相的な K 理論への登り方が、これまでも分厚い本とかも出ているんですけど、「そういう風じゃなくてもっとこういう風に記述した方がはるかに透明に見えるのに」というのがあったりするんですよ。それでそのある側面というのはここで講義をしました。講義をしたけれど、どれだけの人が... まああんまり講義する内容じゃないですけどね。

だから大きなもの... おそらく私の証明したことで、その後も引用されることの一つは博士論文に書いたものだと思いますけれど、そうですね... 世の中で何が言われているかということではなくて、自分が考えると、こういうことができて然るべきだという事があったりします。D 論の結果ができたというのは、結果だけができたというわけではなくて... いろいろな人がやっているという、湧き上がってきたこういう理論というのが、こっちの方向に絶対何かあるはずだと言っていて、でもまだできてないみたいな、そういう感触というのが、分野の通念としてある場合もあれば、個人が持っている場合もありますね。当時は日本でそれをやってるのは私一人しかいなかったんです。そういう風に孤立した状態だったので、逆にある種のオリジナリティというものがある状況だったのかもしれないですけど。こういう風になりそうだという中で具体的な成果、こっちの方向に豊かなものがあるということを明かしているというような、そういうものが何であるか

^{*36} 古田幹雄「東京大学大学院 数理科学研究科 2023」21 頁, 2023, (パンフレット), <https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/gaiyo2023jpn.pdf>

というのを見つけるというのがまたきつと大事です。そういうことを常々考えていると、何かある定理を見た時に、「あ、これ今こう言っているけれど、ここまで拡張できる」というのがヴァッと当たり前みたいに見えたり、「ああ、こう言っているけれど、別証でこういうのがあるな」というのが当たり前のように見えたりします。そうやって自分の中でいろいろなことを考えると、そこに何か、自分の持っているある場所っていうか、別に人に言うわけではないけど、そういうものが出来上がっていきます。それは大事かもしれませんね。今改めて考えると、ですけど。

その中から出てくる時は出てくるし、出てこない時は出てこないし、狙ってやることではないというか、狙ってもできない。何が大事とか、何が根本にあるとか、そういう感覚というのは大事かもしれないですけどね。でも何かたまたまできて、それを初めてやったのが自分だったら自分の大きな成果と言えるのかもしれませんが。それ以前に何か大事だとか、こういう方向に絶対何かがあるだとか、これとこれが関係あるだとか、そういう感触があると思いますね。ある側面では、ものを根底から自分で組み直して考えるというのが大事かもしれない。先ほど、格子ゲージ理論ですごく不思議なことがあったけれど後で納得したと言いました。そこでK理論のいろいろなアプローチがあると言いましたが、それは私自身の中ではそれが整理されてというかな、一長一短というのが全部見えるようなつもりになっていて、自分だったらこうするんだけどなんでかこういうことを書いた本が今のところないとか、そういうことがいろいろあるわけです。でも別に必要ないから自分は書かないわけですけど。でも何かの時にそういう見方が有用になるかもしれない。だからなにか新しいものができたらそれをすぐに生産というか、すぐに出す出すという風にしてしまうよりも、もうちょっと土壌を寝かせておいた方がいいかもしれない気はしますが。

——先ほど透明に見えるという言い方をされましたけれど、前回のインタビューでも Artin のガロア理論の本が透明な書き方をしていたと書かれているのですが、透明に見えるとはどういう意味で使われて

いますか？

古田：当たり前に見えるということです。何の引っかけもなく、「あ、それはそうだ」と、広々とこここの関係が見えるというような感じですね。なにか具体例があるといいんだろうけれど... これは自分のそういう例ではなくて、寧ろ歴史的なすごく大きなことですけど、微分形式という概念がありますよね。あれは、それまであったガウスの公式だとかグリーン定理だとか、そういうものを全部統一的に見ることができるような、そういう概念なんですよね。それはすごいですね、自分が何かが平明にわかるなあというだけじゃなくて。物事のすごさというのにはいろいろなすごさがあるって、すごく複雑なものを組み上げて、ここまで行ったというすごさもあるけれど、この概念を出すとこんなにものがわかるんだという、そういう凄さもありますよね。微分形式とか外微分とか、それを計量のない manifold の上で展開するというのは、例えば哲学者がいくらユークリッドの公理だとかその辺りを眺めて、数学の進む方向はこうだといくら予言しようと思っても出てくるようなものじゃないですよ。

具体例がなかなか難しいですね... 複雑だと言われているものが、複雑かもしれないけど、それなりに秩序だったものとして見えているというようなこともありますね。いい例かどうかわかりませんが、始めに Serre の「有限群の線型表現」の名前を出しましたが、あれにフロベニウスの相互律というものがあります。与えられたひとつの有限群に対して、表現環と呼ばれる環を対応させることができます。その環は、その有限群のありとあらゆる有限次元複素表現全体の全体をつかって定義され、それらを統制するような環です。有限群の間の準同型があるとき、表現環の間に自然に写像ができ、さらにその写像の転置みたいなものもうまく定義できます。こうした体系をつかって、異なる有限群の表現の関係もある意味で統制することができる。そういう見方で、群の表現というものを捉える事ができるというのが、一歩上に立つと出てくるものです。上に行くと、透明というか、すごく見通しが良くなるというのは不思議ですけど面白いですよ。これはあまりいい

例ではなかったですね...

学生の方と話していると、なんだかややこしい理解の仕方をしているなと思うことが時々あるんですけど、ちょっと今具体例がパッと出てこないですね。まあそれは自分もしているんでしょうね。

ただしさっき、透明ってあまりに強調したみたいですが、私は必ずしも透明ということや、その言い方が無条件でよいとは思ってません。寧ろゴツゴツした感じのところにすぐ本質的なものが潜んでいて、整理するとそれが失われてしまうということも結構あります。例えば先ほど多様体では座標がないと言ったけれど、そうではなくてユークリッド空間の上で本当に何かを計算するという事がすごく大事であるようなこともある。ストークスの定理はきってご存知ですよ。グリーンの第2公式というのは、 f と g という二つの関数とラプラシアン Δ に対して、 $f\Delta g$ と $g\Delta f$ 、その2つのものの積分というものがどういう関係にあるのかですよ。これはユークリッド空間のかなり具体的なものだけれど、ユークリッド空間の上で本当にこれを考えるのが大事な場面がやっぱりあったりします。これはだいたい複雑な公式見えるけれど、どうしてこんな複雑な公式というのが有用だったのかというのをどう納得するのか、例えばですけどね。あんまり数学の説明をすると冗長ですけど、この公式の一つの現れる場所というのを考えてみましょう。まずこの等式の特徴というのは、 f と g という二つの関数があって、 $f\Delta g$ と $g\Delta f$ を比較すると、その積分というのはぴったり一致はせず、ちょっとその差が出てくるという公式です。こうやって骨格を抑えると、このラプラシアンの、正確に言うと formal adjoint、形式的に言うと転置行列みたいなものは、自分自身ですね。つまりラプラシアンというのは対称行列みたいな感じです。そう思うとこの公式というのは、ラプラシアンが対称行列であることをかなり保証しているようなものですが、それはちょっと崩れることがある。それは考えてる積分する範囲に境界があるとちょっと崩れる、と思うことができますね。

それがどういう時に有用なのかというと、ラプラシアンの性質を調べたいという時に有用なのかもしれ

ないですけど、ラプラシアンが一つの関数に作用するというのはわかりますが、どうして二つの関数が出てくるのか？ 関数の拡張概念に超関数というのがありますね。超関数というのは何かというと、関数に対して、何か test function というものを持ってきて、それをかけて積分すると数が出てきますね。そこで、「test function というものを持ってくると数が出てくる」という風に、test function に対する応答として関数を捉えるというのが distribution という意味での超関数の考え方ですよ。では例えばその test function というのを使ってラプラシアンの性質を調べたいとします。例えば u にラプラシアンを施すと f になる ($\Delta u = f$) 時に、これを逆に解きたい、つまり u を f で書きたいという事があったりするわけです。こういう時に、今考えている問題を test function を使って考えると逆に、test function にラプラシアンが作用しているという状況を考えればいいかもしれないですね。そういう考え方を使って、このラプラシアンの逆みたいなものを具体的に表示しようとする、実はある特異点を持つような関数が出てくるんですけど、その特異性をこのグリーンの第2公式を使って考察することができたりします。

こういう一例を一つのパッケージみたいに思うと、最初いろいろな公式の一つとして出てきたグリーンの第2公式というものが、どういう機能で他のところに収まっているのかということが見えてきたりするかもしれません。そうするとこの公式は、ややこしそうに見えるけれど、これはまあこういうものを考えたいのはそれはそうだな、という気になるかもしれない。しかもその使い方もわかりますね。これは透明にわかるというのとはちょっと違って、その機能を見て全体の中でどう収まっているかわかるというものです。これに相当することをいろいろなところでやると、遠いところも関連がついたりしてくるかもしれないですよ。そういうことをいろいろなところでやろうとすると、あるところで謎が出てきたりするわけです、「これわかんないぞ」と。そうすると「そのカラクリをわかりたい」、というのが私がやってきたことかもしれません。だから透明

にわかろうとしようとしたって無理ですね。そもそも無定義用語ですけれど。

——次に教育についてお聞きしたいのですが、講義はどのように用意されていますか？ また時間はどれくらいかかっていますか？

古田：それは講義に依りますね。例えば、集合と位相の講義というのを今やっていますが、これは昨年やっていたので昨年作ったファイルというのがあります。そして、実際にやってみるといろいろとまずいから、それを補うものというのも昨年作ったんです。それがあから今はそれを元にしてやっています。だから準備は昨年のファイルを元にして、今年のファイルを作ることと、それだけじゃないな... でもまあ基本的を書く事しているので... 今のところこれは楽ですね。

例えば院生向けの講義で、K 理論の講義というのを2年か3年ぐらいやったんですけど、それは自分が透明に見える見え方というのを説明したいというのと、講義をやっていて見つかったことを講義の途中で考えながら説明するというのをやりました。コロナだったからグッドノート^{*37}で色々書いたんですが、それは時間がどのくらいかかるかという... 結構かかりますね。やっぱり前の晩はほとんど徹夜というのは結構ありました。それより前の日というのは何もやっていないわけではなくて、頭の中でいろいろグルグル回っているのだけれど、なかなか書くという作業にいかんかったり、書いてもなかなか終わらなかったりで... おそらく「何時間かかるか？」という質問は大前提として、一日の中でここで何かやって、ここで何かやって、というスケジュールがあって、どの時間を当てていますか？という感じですよ。そういうような systematic な人だったら妥当な質問だと思うんですけど、ちょっと私はそうではないので。だいたい前の日に四苦八苦するというのが、院生向けの講義とかですね。

一方、1, 2 年の線形代数とかは、何年前にやったものに細かくじゃないけれどだいたい書いてあったりするんですが、でもそれはあんまり見ていない

か。結局だいたい毎回考えていますね。この間の線形代数の準備というのはどうしたかという、何を話すかというのを決めるんですよ。授業の準備をするというのは、やっぱり1回ごとの準備をするというのではなくて、全体をどういう風に構想するのか、そこが大事です。それを話すには線形代数の中身をちょっと話すしかないのだけれど、例えば最初の授業で何を言うかですね。それは線形代数とか微積の位置というつもりです。何の位置かという、自然科学の中でのその役割というのを説明します。一言で言うとそういう感じです。そしてこの講義で何をやるのかという話をしますね。それは行列というのはどういう場面で現れるのかということですけど、大きく言うと2通り、もうちょっと分けると4通りに現れる。2通りというのは、1つは定義域と終域が同じ空間である場合、もう一つは定義域と終域が違う空間である場合です。そして同じ場合は、例えば行列式とか固有値とかが定義できます。それで複素の場合は固有値が決まればだいたい決まることが多いけれど、決まらない場合もありますね。違う空間の場合は、階数というのが決まりますね。2つの違うベクトル空間の間の写像というのは、階数だけが不変量なので、階数が決まったら完全に同型類が決まっちゃいます。この固有値と階数は違う立場ですよ。おそらく講義でやる大事なことというのは、行列式と階数なんですよ。普通はおそらく階数が出てくるのは、連立一次方程式を解く時の解の一意性を考える場面だし、行列式というのはそういうことをやる時に、未知数と条件式の個数が同じ場合に「逆をうまく書けるか？」という場面が出てきますね。でもそういう説明じゃなくて、今言ったような大上段に振りかぶったような説明をいつもしています。

線形代数の中での行列というものの現れ方というのは何を同型と思うかの立場によって2通りに分けられます。同型だったら結局同じ現象だというのが数学のものの見方ですね。さっき説明した2通りの立場とは、また違う基準によって別の2通りの分類

^{*37} Time Base Technology Limited から発売されている主に iPad 向けのノートアプリ

も可能です。それは、内積を考える立場と内積を考えない立場の相違による分類です。だから 2×2 で、これだけで計 4 通りの立場があります。なお、内積を考える立場とは、計量を考える立場といっても論理的には同等です。それはベクトルには長さを考え、ふたつのベクトルの間の角度が考える立場です。4 通りの立場の中で「自分自身への写像を考える立場で、かつ内積を考える立場」は、例えば対称行列の概念はこの立場から出てきますね。「定義域と終域が違う立場で、かつ内積を考える立場」においては、特異値分解という概念が出てきます。特異値分解は知っていますか？工学部の人にはもう当たり前。でもなぜか数学の教科書にはあまり載っていない。1 つの理由は、線形代数の本を書くのは代数の人が多からかもしれない。内積は、複素共役をつかってエルミート内積の形でよくでてきますが、複素共役は代数の教科書ではあまり強調されないから。対称行列の固有値を考えるのとほぼ同じようなことを、異なるベクトル空間の間の線形写像に対して考えると、特異値というものが出てきます。特異値分解というものは主因子分析とかの統計などで普通に出てくるものです。1, 2 年の講義では、東大だと数学科に行かない人もいるし、文系の講義をすることもあるので、そういうようなことはすごく大事だと思うんですね。だから授業ではそういう立場で説明をします。このように内積が入ってる場合を考えたいのだけど、まずは内積が入ってない場合には何ができるのか？ここまで頭を巡らすと、最初にどういう話をするのかというのと共に、授業全体で何の話をするのかが決まります。あとはどっちがどういう順序でやるのかですね。自分自身への写像、つまり正方行列の話を先にやるのか、それとも階数とか掃き出し法の方が先になるのか、それはわからないけれど。年によって違いますし、それから相手によっても違います。文系のなのか理系のなのとかね。

この間は文系の人が対象の講義で、きっと具体的なものが最初の方にわかった方がいいだろうと思って、初っ端に行列式の定義をやりました。行列式の定義って普通は置換を使いますが、偶置換とか奇置換とかって言うと結構面倒ですよ。授業で説明し

たのは行列式の完全な定義を一行でどう説明するかという工夫です。

その講義ではどう説明したかと言いますと、まず行列を書きますね。例えば 3 行 3 列の場合、上から 1 つ、真ん中から 1 つ、下から 1 つで、重ならないように選ぶやり方というのが何通りかありますが、問題は符号ですよ。符号はこうするとわかりやすいです。今選んだ 3 つところを A, B, C とします。 A から上と左に線を引きます。 B から上と左に線を引きます。 C から上と左に線を引きます。今書いた線の交わったところは何点あるかを数え、それが偶数か奇数かで符号を決めます。これはなんというか、あみだくじを横にただけなんですけれど、こう言うとアルゴリズムが簡単にわかりますね。4 行 4 列だって同じですから、最初の日子のイントロの段階で行列式の定義が言えたりするわけですね。そうすると実際に計算ができる。これは必ずしもそうするわけじゃないですけど、学生を見て、そしてもしパッと自分で何か手を動かせることを提示した方が良さそうだなと思ったら、そういうことを言ったりします。それとともに抽象的なことも言うわけですからね。

だから準備というのは「全体をどういう風に構想するのか」ということと関係があって、具体的なことはもうほとんどその場ですね。そういう意味ではすごく時間をかけて準備しているとも言えるし、全然準備していないとも言えるという感じが、少なくとも線形代数ですね。

微積分だと、もうちょっと準備がきつとありますね、ここのところ微積分の講義はしていないですけど。微積分だと大事なのはきっと、微分の方ではテイラー展開というのが大事だと思います。これをどういう形で言うかということ、関数を 1 次近似するというのをが微分の本質で、微分を 2 回すると 2 次式で近似できて、微分を 3 回すると 3 次式で近似できて、そういう意味でいくらでもよく近似できる。それがテイラー展開のおそらく本質的なところで、それが 1 変数関数じゃなくて多変数関数でも同じことができる。その辺りがきつと微積分の「微」の方で大事なことです。ね。

積分の方はちょっとややこしいですね。ちょっと考えたことがないですけど、本当に講義をするとになったらやっぱりこういうことを何日間か頭の中で考えるというのをやると思います。

ちなみに自然科学の中で微積分と線形代数の位置ですけど、自然科学というものを「定量化して現象を捉えるもの」だと思うと、インプットには複数の数があって、アウトプットにもいくつかの数がある、それが現象です。そしてその現象を捉えるという時は、その現象のできるだけ本質を捉えたい。でも本質を捉えるというのはある意味「いい近似を取る」ということと言えるわけです。その時に一点の近くでいい近似を考えるのと、全体を見ていい近似を考えるのがあります。関数の全体を見ていい近似を考えるというのは例えば平均値ですが、要するに積分ですよ。積分は全体を見て一つ数をポンと数を与えるやり方ですが、一方で一点の近くを見て関数を直線で近似するというのは微分ですよ。フーリエ展開とかを考えると、積分を使って全体をもっと近似することになるわけですけど、フーリエ展開という考え方はもっと後で出てきますよね。でも今言ったようなものの見方をすると、フーリエ展開とか、最近だとウェーブレット展開とかをもっと使うんだらうけれど、そういうものはすごく大事な見方ということになりますね。そういうことを言った上で、「だけどまずそれをやるにはこれが必要だ」ということで、今やることの位置というのをきっと説明すると思います。

特性類というのはご存知ですか？ 特性類という概念が幾何学にあって、それをとにかく使えるということが必要なんです。それを院生か4年生に講義する時はどうするかというと、それはやっぱりいろいろな方向からやり方がありますね。いろいろな特性類があるからそれを順番に説明するというやり方も考えられれば、一つの一番基本的な特性類というのを取って、Euler class と呼ばれているものですけど、それが実はいろいろな表示を持つので、そのことを Euler class という一番簡単な場合に限って、いろいろ紹介するというようなやり方もきっとあるでしょうね。その後、他のいくつかの場合も考えて、

このいろいろな方向というのがその場合どうなるかというのを展開するというのが可能かなと思ったら、そういうやり方で講義しますね。

準備というのは予行演習ですね、紙の上でやる予行演習というのが準備です。だから実際の講義よりも長い時間がかかることもあれば、短いこともあります。でも今偉そうにいろいろ言っていますけれど、毎回試行錯誤です。

——では次に、指導学生の教育はどのようにされていますか？

古田：それは指導されている学生の方たちに聞いた方がいいかもしれないですね（一同笑）。毎回試行錯誤です、本当にひとりずつ。まずこの大学だと院試に通った学生の方は、11月ぐらいにいろいろな教員のところを周って、話をするというか話を聞くというのがあります。それは、必ずしもその人に付きたいということでもなくて、教員と話をするいい機会だから、いろいろな人と話をするのが推奨されています。そこでいろいろ話をしますが、いろいろな学生がいるわけですね。

だいたい修士の最初の一回目というのは、私はその人に、「4年までにやってきたこと、あるいは4年でやったことをまとめて話してください」と言って話してもらいます。それから、あるいはそれより前に、これからどういうことをしましょうという話をするわけですけど、まず「これまでどういうことをやってきて、どういうことに興味がありますか？」ということ聞いて、その先に何があるかなということを考えたりします。

例えば例を挙げると、初めから「これをやりたいんです」という人もいます。例えばゲージ理論というのをやりたくて、これまでも本を読んできたので、やりたいです、というのがあると、大体的場合は「それならば」という風に言います。しかしそうではなくて、「ちょっとそれはどうだろう？」と思う場合は、そういうことを言うこともあります。もちろんその段階で学生の方たちはよくわかって言っているわけではないんですけど、それはそれで構わないと思います。例えば、M君なんかは、どのくらい難しいかとか、周りに比べて自分はどんなもんだとかがあんまりわか

らなくて、でも先輩たちがそういうことをやっているから自分も、というようなつもりだったのかもしれませんが。例えば T さんという人は、解析の予備知識が全然なかったけれど、ゲージ理論をやりたいといったことを言っていたので、そこからやり始めて、今はちゃんと研究者としてバリバリ世界で活躍している感じですね。そういう人もいます。

あるいは、院試を受けたときは幾何で受けなければ、やっぱりアクチュアリーとかになりたくて、確率とかの先生につきたかったけれど行ってみたら、「あなたは幾何で入ったんだからそちらの方でやりなさい」と断られたという人がいました。まあそれはそうかもしれませんがね。その人の場合はどうするかかなり困りました。やっぱり、例えばゲージ理論とか大域解析とかそういうものでは全然なくて、その人が興味を持てるものでしかも研究に繋がるようなものでないといけません、これはかなり特殊ケースですけど、とはいえ学生の人数ってこれまでも、何十人にはなりますけれど何百人もいるわけではないので、やっぱり一人ずつという感じです。その人の場合には、厚生経済学のある分野で Arrow の可能性定理と呼ばれている定理があります。ご存知でしょうか？ それはある分野を出発させたような定理で、Arrow はノーベル経済学賞をもらった人ですけど、それとはまた別のことでもらっています。これは数学的な、というか組み合わせ的な論理的な命題なんですね。その証明で、トポロジーを使うものがあるということを聞いたことがあって、それはちょっと面白いなと思ったので、その勉強をするのはどうだろうと思いました。

その定理というのは簡単に言うと、たとえば政治家がいくつかの事項について意見を一つ決めたいとします。でも一人ずつ違う意見を持っている。「ではどうやって決めるのが良いか？」ということに対する定理で、たとえば多数決とか、いろいろな種類があるわけですね。極端なのは、誰か一人の意見を聞いて、

そのまま独裁者みたいに決めてしまう。いくつかのことの優先順位を決めるというのは全順序ということになりますけれど、このようなある種の問題に対して、すごく reasonable な仮定というのを二つ置くと、実は誰かを独裁者にするという解しかないというのが不可能性定理です。だからこれは、何かうまく折り合いをつけるようなことが原理的に不可能であるということからどう出発できるのか？、という問いかけをしたものですね。この topological な証明というものがあつたんです。修士課程では他の人たちと一緒にセミナーというのをやるわけですけど、その中で彼と議論しているうちに、ある空間にある種の距離を入れると面白い議論ができることがわかって、それが彼の修論になりました。今はアクチュアリーの後には研究所みたいところでコンサルタントの仕事をしているようですね。

あるいは、モース理論をやってきたという人がいました。モース理論というのは多様体から 1 次元のユークリッド空間への写像を使って何かやるというものですけど、これが 2 次元のユークリッド空間への写像とか、3 次元のユークリッド空間への写像になったときに、もとの空間のどういう情報がわかるのかという研究も実はあります。そのときからちょっと、いやしばらく前かな、佐伯さん^{*38}という九州大学の方がここで集中講義をされたことがあって、それは非常に面白かったんですね。その集中講義の内容というのは、Springer から英語の本^{*39}として出ています。その学生さんには佐伯さんの講義にされた方向をまずは示唆してみたのですが、彼の場合にはそのあといろいろ紆余曲折がありました。モース関数、つまり多様体から一つのユークリッド空間への写像というのを、一個使う代わりに複数使うという、深谷賢治さんの Morse homotopy という理論があるんですけど、それと無関係ではないような 3 次元多様体の不変量を構成する議論があります。これは個人的に大槻さん^{*40}という京都の方から、本当に個

^{*38} 佐伯修

^{*39} O. Saeki, Topology of singular fibers of differentiable maps, Lecture Notes in Math., Vol. 1854, Springer-Verlag, 2004

^{*40} 大槻知忠

人的に彼のアイデアというのを昔聞きました。そのアイデアというのは、その不変量を積分値で求める、つまり何かの積分として求めるというものだったんです。そのバージョンアップとして、明らかに整数が出てくるようなやり方で、物を数えることができるという方向に、ちょっと面白いことがありそうだったことがあったんですよ。今言った人にはそっちの方を勧めて、彼の修士論文やD論になったんですが、それを勧めたのは彼が最初ではなくて、何年か前に別の人に勧めていたことがありました。その人にもそういう背景があったので、いろいろ思い出しながら言っているので、もうあちらこちらに話が飛びますけれど、複数の違う、年代をおいた学生の方たちに、関係は直接あるとまではいえないけれど同じような方向のことを勧めるということは、何度かありました。今のものはその一つの例ですね。前に勧めた方の場合には、他大学の方なんですけれど、修士に来る前の段階で「こういう方向のことはどうでしょう?」というのを言っていたら、その方向の勉強をセミナーでやって下さった、というのがありましたね。

例えば修士で割と基本的なことをやった後、ドクターで実は自分は物理に関係があるようなことに興味がある、という風に言った学生がいました。その方に対しては、その頃たまたま知った bulk-edge 対応というものの数学的なメカニズムを、これまでは知られていない違う形で示すというのを勧めて、彼は結局そういうD論を書きました。彼は今はそういう分野で研究をしていますね。

どういう分野を勧めるのか、というのについて今言ってきました。それはケースバイケースで毎回もう四苦八苦というか、そしてすんなり決まらなくてあっち行ったりこっち行ったりしますね。ある人の場合にはもうあっち行ったりこっち行ったりしていたんですね。その人の場合はどうなったかという、ある時たまたま慶應大学の、私の共同研究者の亀谷さん^{*41}という方のところに私が行った時に、彼が彼の学生と議論しているのを私が見たんですよ。そ

こでは Khovanov homology というものの議論をしていたんですが、それがすごく面白そうだったんです。それでその学生の方に、一度東大に来て話をしてもらったのですが、それはコンピュータを使っている計算ができる側面があるものだったんですね。それで、その二転三転していたコンピュータにすごく強い人にそちらを勧めてみました。そうしたらそちらの方で新しい不変量を見つけて、その性質でそれまで知られていたある顕著なことの別証を与えたとか、そういうことを修論でやりました。その方はコンピュータに関係のあることに就職したことのあ方で、だからアルゴリズムとかを自分で書いたりというのに非常に強い方でした。だからD論では修論の延長上ではなくて、もっと抽象度の高いようなことをやられましたね。非常に具体的なこともできるし抽象的なこともできる、それは強いですよ。今も理研でそういう研究をされていて、そういう方もいますね。彼の場合は私というよりも、私のところにポスドクで来ていた人としてのいろいろな議論というの、すごく大きかったんだと思います。学生にとって指導教員は大きい存在ですけど、どういう環境にいるのかも非常に大きいです。例えば院生室というのがここにはありますが、いろいろな院生の人たちがいるとか、ポスドクの人もいたりしてそういう人と議論できるとか、自分とは違うような分野の人もいるとか、そういう環境は非常に視野を広くするためにも、あるいは精神衛生上もよかったです。と思います。

以上が大きく見た話です。もっと具体的に実際のセミナーで何を言うのかというと、セミナーでは基本的に私は「わからないところを訊く」ということをしています。何か話をして、「そこはなぜですか?」という風に訊くんです。

それだけじゃないな。今院生の話をずっとしてきましたけれど、4年生のセミナーというのもあります。特にそういう場合には、その先どういふことがあるかという話をしますね。例えば先ほど集合と位相の授業をしてきましたが、そこで同値関係とかそういう話

^{*41} 亀谷幸生

をしたんですけれど、そこの例として Grothendieck 構成という話を余談でしました。それは必ずしも将来そういう言葉に必然的に接する人たちばかりではないかもしれない。けれど、「ここでやっていることはただのおモチャとか人工的なものではなくて、その向こう側に何かあるんだ」という認識は大事だと思うんです。ずっと先のことでわかっているとか、そういうことは必ずしも必要ではないんですけれど、自分の目の前に奥行きがあって、そしてグラデーションですね。遠くの方というのは霞んでいていいし、寧ろ霞んでなきゃいけない。「今これが大事だ。だけどそれはある文脈の下で大事だ。その文脈は今わからないんだけど将来わかるかもしれない」、そういう感覚ですね。それをわかってもらいたいというのはあります。だからある議論があったときに、それと似た議論が一見違う分野にありますよという紹介をしたりします。

例えばこの間の講義で、今日の講義でもちょっと言いましたけれど、帰納的な定義というものをしました。たとえば自然数の足し算ですね。その話をした後に、Zorn の補題の証明をするという、昨年とは違うやり方をしたんです。どうしてそうしたかという、予め決めていたのではなくて、前回の講義をしていたまさにその最中に、「あれ、帰納的定義を説明したけれど、これは Zorn の補題の証明とよく似ているな。Zorn の補題の証明には、他にも実数の切断とか数学的帰納法とか、いろいろ道具が出てくるんだけど、これここで説明した方がやっぱりいいな」と思いました。普通は全然違うところでやりますね。去年の講義では自然数の構成から整数の構成、有理数の構成、実数の構成という風にやりました。それで今年はかなり異例ですけれど、帰納的定義というものを、「きちんと数学的帰納法で何か存在を言う」という議論に仕立て直して、その仕立て直し方というのが Zorn の補題の証明のあるコアの部分の発展的考察と非常にパラレルであるってことの説明を試みたんですね。どこまで通じたかちょっとわからないんですけれど。

一見違うところで似たような議論が出てくるというのはいろいろあると思います。たとえば、Grothendieck でいえば、 $xy = 0$ という図形（両腕をクロスさせるジェスチャー）の、片方の図形をだんだん傾けていくと（片腕を、交点を中心に少しずつ回転させるジェスチャー）、二重線みたいになりますね。それからさっき物理の話がちょっと出てきましたけれど、例えば磁場のある平面において、電子の動きとかそういうものを考える。これ一見全然違いますよね。でも、Grothendieck^{*42} はこの二重線みたいなものを扱うのにどうしたかという、 $y = 0$ ではなく $y^2 = 0$ という関係式の入った環を考えるということをやったわけですね。一方、先ほどのこの磁場のある平面みたいなものを扱うには、やはりある環を考える。非可換トーラスと呼ばれる概念です。2つの関数は、普通は関数って値は実数だから、かけ算で可換ですよ。あるいは座標なんていうのは関数の特殊なものですけれど、 x 座標、 y 座標は可換です、つまり $x \times y = y \times x$ 。それで、 $x \times y = y \times x \times$ 何かとなるような、可換じゃないような体系を考えると、こういうものを扱うことができるし、そういう考えをもっと拡張したような解法があったりします。一方は2乗して0になるようなものがあるけれど可換で、もう一方は2乗して0になるものは無いけど非可換であって、違いますけれど、どちらも空間を考える代わりにその上の関数を考えるという拡張が出来るわけですね。そういう考えを練っているのがどこか歴史のある時点であるわけです。これはまだ授業では一度も学生に説明したことはないかもしれないですけれど（一同笑）。これは例えばですけどね。

でも、そういう見方っていうのは、きっといろいろな所で大事です。「この1つのことが大事」なんじゃなくて、「あるレベルで見ると何か似て見える」というメタのレベルですね。それで先ほど言った奥行きというのは、単に詳しいこととか先に進んだことというだけではなくて、「ちょっと上で見ると2つのものが似て見えてくる」とかも奥行きの一つですよ。

そういう具体例を挙げるといろいろあるわけでは

^{*42} Alexander Grothendieck

けれど、その生々しさみたいなものをセミナーではわかってもらおうとする、というのはありますね。ただ、お話として話すものと、自分の腕力みたいになるものって違うので、どちらももちろん大事ですけど、学生の人にどういうことをわかって貰いたいと思いがらセミナーをするかということを話しました。

もっと先のドクターの学生の場合だと、少なくともドクター1年の学生は1年間、事実上放任だったりします。修士の間でやったことをまとめるっていうのが一つの仕事ですけど、いかに指導教員から自由になって何かできるかっていうのも大事なことです。というのはもちろん言い訳ですけど（一同笑）。基本的には修士論文をどうやって書いてもらうのかというところ、そこに全力を注いでいる感じですね。最初の論文を書く時には、その全体の構成をどうするかとか、引用をどうするかとか、そういうことはかなり言います。

ただ例外もあります。これは一人でやっておいた方がきっと、向こうもこちらもhappyだという場合にはそういう風にしたりしますね。どこまでどう介入するのかっていうのは難しいですね。特に、当人がやる気になっている方向というのがあって、それをちょっと微調整した方がいいと思うような時に、でもやっぱり当人が勢いに乗ってやっていたら、それはやった方がいいかもしれないですね。

あるいは、やっぱり人間なので、人と人の相性というものもあります。私はあまりハラスメントになるようなことはやりたくないとは思っていますけれど、でも後で振り返ると「これはやっぱりハラスメントに当たることをやってしまっていたかな」と思うことが、複数あります。それは後で謝ってもしようがないですけどね。パッと思い出せるだけで3つ思いつけます。逆に言うと、「自分がハラスメントなどをすることはありえない」と思っている人というのは私はあんまり信用できないですね。信用できないっていうかな、人っていうのはいろいろなところに行っちゃうものだから、どういう風になるかわからな

いという前提で... やるしかないですね... いくらでも言うことはあるけれど、例えば... いやでもちょっと（一同笑）、あまり差支えがあることは言えないから。——先ほど奥行きの話の時に、遠くの方というのは寧ろ霞んでなきゃいけないとのことでしたが、それはなぜですか？

古田： すみません。言い方が良くなかったです。

「今勉強すべきものはこれだ」だとか、ある見方から見ると、「この2つを比較することが大事であって、それに比べればこれというのは二義的なものだ」という風に、何かが大事だというのは「何かと比べて」っていうことがありますよね。あらゆることを人がやることはできないわけです。これは優先順位というのとは、重なりますが、必ずしも等しくはないです。ある分野が今やっていることとか、ある人が今やっていることというのは、ある決断のもとで何かやっているわけですね。簡単なことと言えば、講義するという時に授業で言うべきことは、自分も無数にわかっているわけではないけれど、無数にあるはずですね。その中で実際に話をするのはごく僅かなわけですね。だけど、それだけの背景があって話をしている。研究者が授業をする場合というのは自ずとそういう風になりますけれど、聞いている方はなかなかわからないんだけれどね、「後になってわかる人もいる」くらいですけど。「あれもやりなさい、これもやりなさい」と言われても困りますよね。向こうが霞んで「なければいけない」というのは、ちょっと不適切だったかもしれませんが、「あらゆることを自分ができなくてはいけない」というのは、それは... どこか違う気が、少なくとも今はします...

先ほど、物理の方が質問をしに来て^{*43}、集合と位相の講義というのはちょっとオーバーワークというか、自分のやりたいことにとっては多すぎるのではないか、という相談を受けましたが、その答えはYes, そうだと思う。「だけどじゃあ何ができるのか」ということを言ったわけですけど、恐らくそういう見切りがあって、自分が本当にやりたいことができるというのがあります。こう言うと非常に practical

^{*43} 「集合と位相」は数学科の開講科目ですが、物理学科や情報学科などの学生も履修することができます。

な、「優先順位をつけるのが大事だよ」みたいに見えますけれど、物事を上手くこなすためのスキルというよりも、「人にとってまず目の前に何があるか」というのがあるというかな、そういうあり方しかないんじゃないかという気がするという感じですね。ちょっと上手く言えなくてごめんなさい。

——では次に、数学の学び方について伺いしたいです。

古田：... ちょっと困ってしまっているんですけど、数学の学び方... 自分がどうだったかということと、学生にどういうことを勧めているかっていうことと、いろいろありますね。そして学生に勧めるという時には、学生が自分で勉強する時にどうしたらいいのかっていうことと、それから授業か何かでこれがこうだって説明するのとか、いろいろなレベルのことがありますよね。

最初の方でもちょっと言ったと思いますが、私は基本的に「からくりがわかりたい」、どうしてこうなっているか知りたいなというところがあります。だから証明も、やっぱりこの証明の一番大事なことというか、どうしてこれが成り立っちゃうんだらうっていう、その一番の根本みたいなところを知りたいと思いますね。でもいつでもそれがわかるわけじゃないけれど、わからなかったら、「ああこわかんないな」と思いながら通り過ぎて、そうしたらそれこそ10年、20年してからやっと思い当たるようなことがあったりするかもしれないですね。

例えば、複素解析で言うと、コーシーの積分定理とがありますよね。あれはすごい不思議なわけです。実数の範囲で微分可能って言うと何にも出てなかったのが、複素数の範囲で微分可能であるとしてこんなにいっぱい出ちゃうのかと。それに対して何らかの納得が必要ですけど、これはいくつかの階層というか、いろいろな多岐に渡る理解の仕方というか受け取り方があるんだと思います。例えば一つは、微分するといっても複素数の場合は色々な方向から微分することになるから、実は一つの微分可能性というのはいろいろな情報があるんだっていう漠然とした受け取り方です。それから、じゃあどうして複数の方向から近づく複数の微分の仕方があ

ると、そんなに多岐に渡る情報が出るのかというと、これはコーシー・リーマン方程式というある偏微分方程式系に帰着するからだ。つまり、そのあらゆる方向という時に、複素数の意味で微分可能であるというのは、その $\sqrt{-1}$ 倍っていうのがあって、それが縦と横を入れ替えているわけですけど、その微分が複素数の掛け算として出てくる。複素数の掛け算としてその1次近似ができるということは、その縦の方向と横の方向を何か結びつけているから、ある偏微分方程式系があると。これは1次元の場合になかったことだとも言えるわけですね。

例えばコーシーの積分表示で、境界での値がわかると内部の点での値がわかる。これの一つの理解の仕方は、「これが複素数で初めて起こることだ」と。ストークスの定理と言いますか、「境界の積分と中とが関係があるということ」と関係があるという見方「も」できます。1次元で全然それに関係することがないかと言うと必ずしもそうでもなくて、例えば1次元で2回微分したら0になるという関数を考えると、直線ですけど、両端の値が決まると決まっちゃいますよね。これは2次元でもラプラシアンが作用すると0になるという方程式があれば、境界の値が決まると円の真ん中の値は周りの平均値になるということが、直線の場合と類似になっていますね。だからあるところから見ると1次元と2次元と続いていて、すると次は3次元と、もっと高次元でも似たようなことが成り立つ、という見方もできるし、あるところではその「 $\sqrt{-1}$ 倍」というのが大事だと言う見方もできますし、その $\sqrt{-1}$ 倍をその微分可能性で考えるとコーシー・リーマンの方程式に直結するという見方もできますし、いろいろな見方ができるわけですね。その中で一つの命題がある位置の仕方をしている。

何かそういう風にネットワークの中でというのかな、他の命題の中でどういう位置にあるのかということをお納得するというのは、何かその命題の意味がわかるということの一部ですね。そんなようなことをわかるとちょっとわかった気に... わかるというか、わかるということにちょっと近づけたような感じになりますね。だから、「どう学ぶか」というか、

「何を目指しているか」というかな、その各瞬間、各瞬間に。そういうと、一つは理解を目指すっていうことが多いわけですね。もちろん何かに使いたいから、使えるかどうかと思って見るという、そういう見方も研究者の場合だったらあるし、他にもいくつかあると思います。何かと比較するために、「これどうなんだろう」と見るとかね。まずはものを理解したいという時に、その命題をいろいろ動かして、その中でどういう位置なのかというのを把握するっていうのはありますよね。学ぶ... あとこれは結果論ですけど、何かが「ああわかった」って思うのと、「わあーすごい」って思うのって同一だったりすることがあります。これは前回のインタビューで話したかどうか、全然覚えていないんですけど、院試の話ってしましたっけ？

——はい、ありました。

古田：どうして幾何学に興味を持つのか、それはある種の大域性みたいなものに感銘を受けたわけですけど。しかし、後になってくるとそうじゃない幾何学の側面、もっと具体的な側面というのが非常に面白くなってきたというようなこともあります。理論化というのはすごく遠くまでいけるみたいだけけど、その理論に解消できない部分というのが非常に面白く思えてきたりとかね。でも「ああそうなのか、すごいな」というようなことは、求めてできることではないですけど、でも数学を学んで、「ああ何か学べた」って思うのは一つにはそういう時ですね。もう一つは自分に能動的な力が身についたって思うような時かもしれないですね。何かのホモロジー群が求められるだとか、積分の計算ができるだとか。

今はきっと検索するなどしていろいろ手段があるんだと思います。その具体的なやり方とか、それがいいか悪いかっていうことは、よく知らないので私は決定的なことは言えません。でも、昔は本を読むしかなかったんで、一つの本というのがすごく貴重でしたよね。それが比較していい本か悪い本かとかそういうのもよくわからないけれど、とにかく一つ大事で読むという、そういう感じでしたね。一冊の本

を隅から隅まで読むというのは、それは一つ大事なことかと思います。ただそれはあんまりいっぱいはいできないけれど、あんまりいっぱいいなくてもいいかもしれない。隅から隅まで読むとどういうことがわかるのかというと、書く方がどういうことを思って書いているのかが伝わるっていうことですけど、それを本当に1回か2回すれば、他のことは「それと同じことがある」という風に思えるかもしれないですよ。一度はそれはやった方が良くて、そうすると著者による思い入れがだいぶものによって違うということも見えてきたりすると思います。人によって様々、国によっても時代によっても様々だったりしますけれど。

何かを本当に学ぼうとした時... 私が4年とか修士の頃にゲージ理論という分野、当時確立されていなかったですけど、それを学ぼうとした時には文献がそもそも少なかったんで、そういう意味ではあんまりアップアップはしなかったですね。ただ一つの文献を理解するために、もう様々な知識が必要だということはありましたけれど。そういう意味では、ラッキーというのかな、特殊な状況に出会ったのかもしれない。一つの理論に出会うときに、その理論の発展段階のどこで出会うのかってというのは、偶然ですけどね。ただそれは一つ、ものを学ぶという時のあり方でしたけど。

もっと後になって、物理学を学ばなくてはと思ったことがありました。その時に何をしたかという、ありとあらゆる参考文献などをコピーするということをやったことがあります。当時はPDFファイルでどこかに保存することが、出来たのかもしれないけれど私はよく知らなかったんで、かなり膨大な文献でした。それを読もうと試みましたね。くりこみ理論なんかについてもいろんな本を、洋書の本も含めただけれど、買ってなんとか読もうとしていましたね。それは、「なんとかわからなきゃ」っていうか「わかりたい」ということでやっていました。どういう順序でやるのがいいかとか訊く人も誰もいなかったんで、やるしかないということで。でもある時、「ああ

*44 Kenneth Wilson

そうか」と思ったのは、Wilson^{*44}という人のものの考え方に触れたときでした。勉強していて linear にものがわかるのではなくて、ある時にある理解が進んで、そうするとまた別の方向にスッと進むけれどまた行き止まりになってとか。これはなんでもそうですね。アウトプット、単にまとめるというのでもいいですけど、できたら自分なりに自分が一番いいと思う方法でまとめるというのは、ものが理解できているかどうかの試金石としていいかもしれないですね。

先ほど「遠くの方の背景はグラデーションで霞んでいってもいい」ということを、そして「全部をわからなくてもいい」ということを言いましたけれど、まったく逆のことを言いますと、「全部わかんないといけないんだ」というのは、すごい原動力になりますね。ただそれは「自分で決めた範囲で」ですけど。「この範囲は絶対わかってなければいけない。あらゆる文献のあらゆる細かい議論を自分で再現できなくてはいけない。」それは実際にできるかどうかは別だけれど、そう思って何かに取り組む。ここは言い方が難しいですけど、「できて当然」と言い過ぎかもしれませんけれど、「出来なさいいけない」というと強迫観念になるし、難しいところですね。そういう学び方みたいなものもあると思います。

逆に「これはいけないな」って思うことを言うと、皆さんには当たり前かと思いますけれど、「定義をないがしろにする」。学生と話していて、その学生が「ええ、この定義全部覚えなさいいけないんですか?」という風に言ったことがありました。それが何の定義だったか覚えていないんですけど、群の定義だったか位相空間の定義だったか。ちょっと愕然としたという経験がありますね。これはおそらく覚えるんじゃないくて、身につけるといとか身につくはずのもの

のですけれど。そういう発想が... ちょっと話の方向がシフトしますが、学生の人と接していてどういう時にまずいなと思うかという、何か「クリアするもの」として、そして「試験が終わればとりあえずクリアされた」ということがどこか大前提となっているような本の読み方です。例えば、「この証明は全部覚えなさいいけないんでしょうか?」っていうのは、そりゃ気になりますけれどね、Yes か No か言うのは難しいんですけど。だけど「覚えなさいいけない」という受け取り方がちょっと違うし、そこに気づかずに「どこまで覚えよう」と思う... ちょっとこころまぐ言葉になりません。伝われば伝わるんだけれど、伝わらなかったら伝わらないようなことでしょうね。学ぶということでもとても苦労したのは、その物理のことを学ぼうとしていたある時期でしたね。(宮澤仁さんが入室^{*45})

古田: 私は自分で答えるより人に振る方が楽なんですけれど、今「数学を学ぶというのはどういう風にしたらいいんでしょうか?」と言われて困っているんですけど。一応私へのインタビューなので完全に振るわけにはいかないんですが、何だかごめんね。

宮澤: いえいえ。古田研の D3 の宮澤です。

古田: インタビュアーの皆さんはご存じらしいです。^{*46}

宮澤: そうなんですか。なんでだ (一同笑)。

古田: セミナーで何か学んだと思うようなことがきつとあるかもしれないし、本を読んでいて何か学んだと思うようなことがあるかもしれない。学んだと言ったらいいのか、身につけたと言ったらいいのか、何かやろうとしてうまくいかなかったことにケリが付くための手段だったりって言えばいいのか、いろいろな場合があると思います。特に大学での、学部時代、あるいは修士の時、ドクターの時、さっき^{*47}、とか、ど

^{*45} 都数の第 60 代委員長 (委員長とは現在では会長に当たる役職) で現在古田研究室の博士課程 3 年生。「宮澤さんが今回のインタビューを聞きに行きたいと言っていたが、(同じく古田研究室の博士課程 2 年生で都数の第 61 代委員長でもある) 名取雅生さんがインタビュアーに気を使って止めたため来なかった」という話を古田先生から聞いており、インタビュアーは宮澤さんにも参加してもらおうと院生室を訪ねたが不在であった。そこでその場にいた院生の方に伝言をお願いしていたところ、このタイミングで登場された。

^{*46} 「数学セミナー 2023 年 4 月号」、日本評論社、2023 の「[座談会] 数学者を志す若者たち」という記事によってインタビュアーは一方的に宮澤さんのことを知っていた。

^{*47} 今日の午前中に古田先生と宮澤さんのセミナーがあった。

いう時に、必ずしも教員からではなくて、場から、あるいはやっていることから学べたと思いますか？

宮澤：まず、自分では勉強していたつもりになっていても、研究で使うまでちゃんとわかっていなかったなと思うことがありました。それは研究で、その論文とちょっと状況は違うけれどこれの真似をしようと思った時に、最初は「まあ同じでしょう」とか思っただけなんです。けれど、幾何の話なんですけど、本当にこの議論は実はレヴィ・チヴィタ接続からつくった「あの」Dirac operator じゃなきゃいけないんだとか、ここだけあってればいいと思ったら、本当にレヴィ・チヴィタから作った「あれ」であることを使う瞬間があるとか、そういうことが出てきます。その時には学んだという風に思いますね。

古田：一連の議論があると、長く時間やスペースを費やしている部分が必ずしも本質のことではなかったりして、本当に一行、軽く書いてあることが実はここで一番大事だったりする。それは最初読んだりした時にはあまりわからないけれど、自分でやろうとしてハッと気が付くというようなことがある、ということですね。なるほど。

たとえば今日の集合と位相の議論なんかでも、「それはどうしてなのでしょう」という根拠の話で、行列式がどうして連続関数なんだろうかということについて、とても面白かったんです。行列の成分をとるというのは連続ですけど、「掛け算は連続である」というのと、「連続関数を2つ足したもの、あるいは引いたものも連続関数である」、というのをその方は念頭においていて、その2つは違うレベルにありますよね。かけ算という1つの演算に対するものと、もう1つは連続関数というものが足し算という演算に対してどういう風にふるまうかというものの、そういう理解の仕方もあります。だけど、「掛け算という演算は連続である」、「足し算という演算も連続である」、「連続と連続の合成は連続である」、という理解もありますよね。そういう理解もあるねというのを集合と位相で議論したんですけれど。これはどちらもありで、どちらも理由のあることだと思いますけれど、

最初はなかなか気が付かないかもしれないですね。でも言われてみて気がつく、研究だったら研究に使えたり応用ができたりするのもかもしれないですね。今の例で言うと、「連続の合成が連続になる」というのはあまりに当たり前で気が付かない、けれどそこに使われている、というようなことを、学生の方が気がつかないときに指摘するというのはセミナーの役割ですね。先ほど宮澤君が言っていた例だと、もしセミナーでその議論を説明して、レヴィ・チヴィタというものがどれほど本質かというのをあんまり気がついていない説明の仕方をしていたりすると、そこを指摘するとか、「そこはどうしてですか?」という風に聞いて、自分の中からそれが出てこざるを得ないようにするとかっていうのが、セミナーの仕方ですね。

学ぶって、やっぱり一人じゃ難しい。本読むというのは本との interaction ですね。セミナーっていうのは場との interaction ですね。そして講義する方にとっても、講義しながら気がつくことというのがいろいろあります。先ほど言っていた帰納的定義とZornの補題の証明のあるところまでパラレルな感じだということを、講義している最中に気がついたりとか、そういったことはたくさんありますね。

学ぶ時に困ったことというのは誰でもあると思いますけど、この1行がわからないというので苦労したのは昔よくありましたね。昔というのは、一人で本を読んでいて「ここわかんない」というので。代数の本とかだと、環論の何かイデアルがどうかそういうなのとか、わかればわかるんだけど一つずつが大変だとか。でも別のわからなさで本当に困ったというのが、あまりにもやるべきことが膨大に見えて、「これが果たしてできるんだろうか」という。この後者の方は、やっていけば結局できてしまうというか（一同笑）。できないものはできないですけど、結構やっているときに見えるものですね。そして修士の2年とかドクターの3年というのは結構長くて、学生の方たちを見ていると、その2年間とか3年間で本当によくここまで成長したって思うことはよく

*48 今日の午前中に古田先生と宮澤さんのセミナーがあったという事を、古田先生からインタビュー前の雑談で聞いていた。

あります。今日の午前中もありました (一同笑)*⁴⁸。

古田：逆に、数学を学ぶにはどうしたらいいだろうということを知りたいというのは、具体的な場面では例えばどういうところがありますか？

宮澤：最近はいろいろな専門家の方々と知り合いになったりしましたが、専門家に訊いてしまうのが早いということ、今は少しは知っていますけれど、M1くらいまでその発想が全然なくて、教科書を1行ずつ読むしか知りませんでした。すごくいろいろなことを知っているようにみえる人って意外と質問するのが上手な気はしますし、いろいろな人のことを知っていたりします。そうやって質問したりとか耳学問で聞いたりとかっていうのが、自分にとっては非自明でした。

古田：Bounded cohomology という概念とか Gromov*⁴⁹ の simplicial volume という、名前だけでいいんですけど、そういう概念とかがあるんですけど、それは私は院生室で学びましたね。3年上の三松さん*⁵⁰という方に説明してもらったんです。自分ではちゃんと読んだことは一度もないんですけど、そういうものもある。それは自分で使うわけではないけれどある分野の非常に基本的な概念だから、ある分野でどういうことが行われているだろうとかということを理解するもとなってますよね。それと関連することを自分で考えたことはなくはないですね。実際に考えたというのと、それが論文の形になるというのはまた別のことですけれど。

最近学ぶということで、そういう障壁というか、どう学んだらいいんだろうっていうのを思うような場面っていうのは... あるいは前はそう思ってたけれど今は無くなったんだとしたら、それは何が変わったんでしょうね。宮澤君の場合には「知っている人に訊く」。これは言葉にすると簡単ですけど、それはあるネットワークの中で研究者がいるということですよね。

宮澤：そうですね。

古田：そして、本当にわかっている人というのは物事を簡単に説明できるんですよね。

宮澤：そうですね。

古田：ちょっとした図を使ったり、思いがけない繋がりを指摘したり。そうすると「こういう風に思っていたけれど実は本質はこっちだったのか」って思うことも結構ありますよね。「何が大事なのか」っていうのは本当にわかっている人とか専門家じゃないと。「大事」って何なのかというものもありますけれど。そういう価値観がそもそも初め学んだ段階ではないですよね。価値観っていう言葉だけ言っても中身がないと意味がない。価値観が大事だとかいっても自分に価値観が身につくわけではないですよ、実際のものに即しないと身につかない。

たった今学びたいと思っていることは、nonstandard analysis が具体的にある場面ですぐに使えるのかということです。それだけじゃないですけど、例えばそれは一つ知りたいと思っていますね。文献としては、本を持っているのと、それからウェブ上の文献で良さそうなのが一つあったので、それを読むということ、取り掛かりになってるわけではないですけど、ちょっとしたりはしています。

でも、なかなか進まないですね。それは、やはり昔と違って集中できる時間をなかなか取れないということが一つはあると思います。月水金土と疲れることがあって、このごろは疲れると疲れが回復するのに結構時間がかかるというようなことがあります。今皆さんはそういうことはないと思うんですけど、そういう時期にどんどん吸収した方がいいですね。だいたい最後は年寄りの言うことというのは同じようなことになるんですけど (一同笑)。そんなところですかね、また後で思いついたら言うかもしれませんが。あんまり、興味深い本を書いていた著者の方々みたいにスパッとはいきって言えなかったと思うけれ

*⁴⁹ Mikhael Gromov

*⁵⁰ 三松佳彦

*⁵¹ インタビューをしていた5号館の教室を追い出された*⁵²ので数理棟のセミナー室に移動するという際の雑談において、小平邦彦編「新・数学の学び方」、岩波書店、2015が面白かったので古田先生にも聞いてみたかったと伝えていた。

*⁵² インタビューは長時間にわたったため二日に分けて行われた。月曜5限に古田先生は集合と位相演習を持たれているが、インタビューは2回ともその5限後にそのまま教室を使って行われた。1回目は警備員の方の優しさで、本来はもっと早くに追い出され

ど^{*51}。^{*52}

宮澤：ちなみに超準解析に興味を持たれたのはどうしてなんですか？

古田：超準解析に興味を持ったというよりは、それを使えないかと思ったということです。格子で離散近似したものと連続なものとの繋がりとこのことを考える時ですが、離散系でものを展開しておいたら超準解析であれば自動的に連続でやったことになっているという、そういう枠組みがあります。なのでそれを上手く使うと離散の場合の指数と連続の場合の指数が一致するということの証明を、ある見方で見ることが出来るんじゃないか、という興味からですね。そして超準解析を、超フィルターを使うんじゃないくて公理的にやるようなやり方もあるので、そういうやり方で見るとどうなのかというのもちょっと気になりますね。

あるいは非常に具体的なことを言うと、almost flat bundle を使った窪田くん^{*53}の理論とかがあるけれど、それと超準解析的なものの見方とは、どういう関係があるんだろうという。これはある種のフーリエ変換みたいなことに繋がっているんじゃないかという、全然まだ数学になってはいないけれど、ちょっとそういう興味がありますね。これはまだ全然何も形になっていないことです。そういう風に個人的に何か「これはどうだろう」と思って考えることが他にもいろいろあるわけだけれど、それはフツフツと湧き立っているようなものであって、それがどういう形になるかという、形になった時はなるけどならない時は全然ならない。大体ならない(一同笑)。それが学ぶ...ということについて、とりあえず今思っていることはこんなところかな。

——物理学を学ばなくてはと思った時期があるとのことでしたが、具体的にはどの時期ですか？

古田：それは Seiberg–Witten 理論というものが出てきた後ですね。それは、ある物理的な議論からそういうものが示唆されたという理論なんですけれど、その物理的な議論を知りたかった。結合定数というものをどんどん強くしていったある種の極限を記述するような議論に、元々は見えなかったような粒子が実は現れて、それが monopole とか baryon とか呼ばれるものです。そういうものを記述する方程式があって、それが元の理論と同等であろうというように、大体の話を言うという筋道です。それが Seiberg^{*54}と Witten^{*55}の議論で、強結合領域でどういう種類の粒子が現れるのかというのを、状況証拠からこういうものではないかというのを言っている論文があったんですよ。でも、その強結合領域で何か新しい粒子が現れると言われても一体それが何を指しているのか、そして古典論で考えるのと量子論で考えるのはこういう風に違って、量子効果を考えるとこういう風になっているとか言われても、その量子効果って一体何を指してるのかとか。そのために path integral というものが現れるわけですけど。そしてそれがただのお話ではなくて、そこで数学でそれまで全然知られていなかったすごいものが出てきたっていうのは、いったいどういうことなんだろうと、それを知りたかったですね。

——その後に Wilson という人のものの考え方に触れたとのことでしたが、それはどういった感じだったんですか？

古田：それはいろいろな本を見たりしたその経緯です。くりこみも、最初は朝永振一郎の議論というのがあったわけですけど、無限大から無限大を引くと有限が出てくるみたいなもので、それは何かマジックみたいでよくわからないんですが、いろいろ見ると物性物理の方でくりこみの考え方というのが

るのだが、最終の 21 時まで教室を使うことができた。しかし 21 時を少し過ぎてしまったため少々怒られた。2 回目も 21 時まで残らせてもらえることを当てにしていたが、やはり前回のがいけなかったのか、早々に追い出されてしまったため、やむを得ず数理棟に行くことになった。しかし結局 2 回目のインタビューが終わったのは 22 時であったため、いずれにせよ追い出される運命であった。

^{*53} 窪田陽介

^{*54} Nathan Seiberg

^{*55} Edward Witten

^{*56} 田崎晴明

非常に使われている。そこで Wilson という人が考えたアイデアがあるということを聞いたりしました。あるいは田崎さん^{*56}という物理の方がいて、その方が書かれているくりこみの説明で、全然量子論が出てこない説明があるんですよ^{*57}。くりこみというよりくりこみ群というものの考え方の説明ですけれど、いろいろなものを読みましたが、最後は何かやっぱり一つのものをがっちり読まないといけないということで、九後さんという人の「ゲージ場の量子論」という上下二巻出ているもの^{*58}を一生懸命読もうとしました。でもそれでわかったわけではないんですけどね。可能なあらゆる物を読もうとしましたけれどね。

広島大学でくりこみの講義をしたことが一度あります。集中講義頼まれたのですが、なんでもいいと言うので（一同笑）。その頃、摂動論的なくりこみというのは「ああこういうことか」と思ったので、そうしたらその物理の方が出ていて、非常に恐縮というか困った記憶がありますけれども（一同笑）。さっき違う分野のことが共通して見えてくるというようなことを言いましたけれど、例えばくりこみという考え方と、それから無限次元の力学系で中心多様体という概念があります。これはくりこみそのものというより、くりこみによってあるパラメータ付けられた理論を作るという過程が、ある種の中心多様体を具体的に構成するやり方と見ることができるんだというような認識に達したりしました。おそらくそういうことが書いてある本はないですよ。

宮澤：くりこみ群フローが、みたいなことですか？

古田：くりこみ群のフローというのが力学系だとします。それは無現次元の空間に対して定義されるわけですけど。

宮澤：場の理論の空間ですよ。

古田：はい。それでその中から実際に、ある、例えば質量と電荷で parametrize された理論の族を作るわけですよ。その具体的に作るやり方、それが摂動論的なくりこみであるわけですけど、それが中心

多様体をどうやって具体的に「作る」か。存在は不動点定理とかで証明するやり方がありますよね。でも本当に構成するにはどうしたらいいのかという話です。

中心多様体というのは一通りの場合もあるし実は一通りじゃない場合もあります。それがそのくりこみで言うと、漸近的自由という概念が物理の方でありますけれど、その漸近的自由だと恐らくくりこみで一つ、パラメータで理論がパッと決まるんですけど、漸近的自由じゃないときと、そのくりこみのやり方によって出来上がるものはいろいろ変わるかもしれないなと思ったんですよ。それは中心多様体的な考え方をするとそうだと思うんですけど、でもこれは物理の人にちゃんと聞いたことはないから正しいかどうか、物理の認識とあっているかどうかわからないですけどね。そういう風になんとかやっているところと全然違うところで自分の知ってることと繋がりがつくかもしれないですね。

でもそこで自分で勝手に思ったことというのが本当に正しいかどうかはわからないので、物理のことなら物理の人に聞いてチェックしてもらわないとわからないですけどね。そういうことができる相手がいるといいわけです。それで今たまたま言った疑問というか、質問というか、自分のこう思っているということが、たまたまですけど、物理の人に聞いたことがありませんでした。ですが同じようなことがいろいろ物理のことであって、物理の人に会った時にそういうやりとりをしたり、逆に向こうの方も数学について聞いたりするとかいうことがあったりしますね。ちょっと突出した話でした。

宮澤：ちなみに田崎先生のくりこみの説明というのはどこに書いてありますか？

古田：それはウェブ上でたまたま見つけました。それは人工衛星の軌道のようなものを対象にして、パラメータを変えるとその結果がどう依存するのかという、その依存性を微分方程式にして、その微分方程式を解くとある極限を予言することができるとい

^{*57} 田崎晴明「くりこみ群とはなにか」、学校法人学習院, <https://www.gakushuin.ac.jp/~881791/pdf/ParityRG.pdf>

^{*58} 九後汰一郎「ゲージ場の量子論 I」, 培風館, 1989
九後汰一郎「ゲージ場の量子論 II」, 培風館, 1989

う、一般的に言うとなんかそういう枠組みを具体例として出していました。だからくりこみの考え方そのものは必ずしも、量子論とかそういうところだけではない。普通は粗視化といいますか、系のスケールを変えることに関する応答を見るけれど、その応答を見る手段というか応答を見る見方はもっといろいろなところにあるということを説明してあったものです。恐らく検索すると引っかかるんじゃないですかね。もともと何の質問にどう答えていたのか忘れましたが(一同笑)。

——これが最後の質問になるんですけども、先生にとって、数学とはなんですか？

古田：そういえば予めこういうことを質問したいってメールで来てたよね、もっと考えてくればよかったかな(一同笑)。

... .. 自分が知っている、僅かな、本物の一つ、と言うことはできると思います。確かにそこにもものがあるっていうことを、自分がわかっている。いろいろな人にとってきっとそういうものがあるんだと思うけれど。

例えば音楽家にとって音楽ってというのは恐らくそういうものだと思うんです、私はそこまで音楽というのはわからないけれど。全然方角も質も違うけれど、数学というものの... そこに、存在するとも言えるし、人が歴史的に作ったものとも言える不思議なものですよね、数学ってというのは、そういう非常に複雑っていうかな、不思議なものがそこにあるわけですけど。例えばですけど、恐らく音楽というものの、一つの曲の中である音を美しいと思うのは、もうそこに音があるからとしか言いようがないかもしれない。あるいはある音の組み合わせと言ってもいいですし、あるいはその時間的な変化と言ってもいいですけど。そこにあるとしか言いようがないんだけれど、それはやっぱり歴史的に作られたもので、ある作曲家の人が作り、そしてある演奏者が演奏したものかもしれないですよね。

これは今一応形式的に似た言い方をしましたけれど、中身はもちろん全然違うと思います。ただある重さを持った、ある深さ、深さっていい言葉かわからないけれど、人が一生をかけてそれをやっても全

然構わないようなものだし、実際そういう人はいっぱいいるし、そうやって集団でできたものですよ。私は数学が何かということは言えなくて、数学の持ってるその一部の性格をただ言っているだけだけれど、それも全部わかっているわけではもちろんなくて、ちょっとです。でもそういうものがあるっていうことを知っていると、他のところにあるものも「きっとそういう風かもしれないな」という風に思える。

今学問とそれから芸術ということをやったけれど、恐らく全然そうじゃないようなところでも、学問体系と言えるようなものでないようなところにも、「この存在ってというのはどういう存在だろう?」、それでそれを受け止めるということが、すごくその人にとって大きなものだというのはいろいろあるんだと思います。なんか仰々しい事じゃなくてもね、本当に、ただその辺を歩いていて... よくベンチにお年寄りが腰掛けて周りをじっと見ていたりすると思いますけれど、私が歳をとったせいだと思いますがあの気持ちはすごくよくわかる気がする。私自身もそうやって周りを見ているんだと思いますけれど、これももちろんそうやって周りのことを受け止めることは、数学とも違うし音楽とも違うけれど、でも何かしみじみとそこにいるというだけでその人にとっては大事なことがあるかもしれないわけですよ。さっき奥行きの話で遠くというのは霞んでもいいと言ったけれど、やっぱりある種の遠近感を伴うような、そしてもっと違う次元にも広がっているような、そういうものがこの世の中にあるんだなっていうことを教えてくれるものかな。そういう側面が一番大きいかなと思います。

もっと別のことを言えば、例えば社会ということでは、私なんか、たまたまこういう時代のこういう環境でこんな風に生まれて、それでたまたまお金をもらったり人と interact して社会的に暮らしているというのは、数学だからできたけれど数学以外だったらきっと出来なかったかなという気もありますね。だからこの非常にいびつな形をした一人の人間が、今この時代の今ここにいることを許される一つの通路みたいなものとして機能している、そういう側面もあると思います。これもしみじみと思

うことですね... そんなところかな... ... 人によってもいろいろだろうけれど... これをやっていれば何かをやっていることに、なる、ので... そこで安心していても言えるかもしれないけれど、そこにしがみ

ついているとも言えるかもしれない。個人的にはそういうものですね。

——本日はお忙しい中ありがとうございました。

インタビュー延長戦：対談（古田幹雄先生 × 宮澤仁さん）

——宮澤さんの方から院生ならではの質問はありますか？

古田：あるいは院生だからこそ聞きたいことがあればどうぞ（笑）。

宮澤：寧ろ自分に質問してもらった方がいいかもしれません。こんなにいい話の後に...

古田：全然いい話じゃない。かなり恥ずかしいことをいろいろ言いました。なかなか学生の人にも喋れないけれど、やっぱりこういうのは本音で言わないと。

学生の人たちに、というか宮澤くんとかによく訊くのは、「以前と今とどう変わったのか？」ということがありますね。例えば修士論文を書く前と書いた後だと、何が自分の中で変わったのかという、そういう質問をすることがありますね。あるいは1,2年生向けに全学自由ゼミナールというものがありますが、それをやるときの質問としても、「そのゼミナールを受ける前と受けた後とで、どういうことが変わって、あるいは逆にどういうことが変わらなかったのか？」という問いかけをすると、例えば文系の出席者の方たちからすごく面白い反応が返ってきますたりすることもありますね。

例えば修士に来る前と修士に入った後とで何が変わったのか、でもいいですし、あるいは、都数に入る前と入った後とで何が変わったのかでもいいですし、どうでしょう？ 変わったと何か自分で思うようなことというのはありますか？

宮澤：多分、何段階もあるような気はしています。それこそ高校から大学に上がると違うし、やっぱり修士に入る直前と入ってしばらくしてでも違いますし、入ってしばらくしてからと修士論文を書く段階でも違いますし、書き終わった時も違います。逆に、どんどん数学との付き合い方はアップデートしてい

ないと、なんて言うんでしょう、どこかで無理が出るような、そんな感じはしています。

高校のときの自分にとっては、数学は面白いパズルだったりして、学問としての深さみたいなものは... おもしろ話として、例えば n の自乗の逆数和が $\pi^2/6$ になるとかのおもしろ証明とかそんな話は高校生の時でも聞いたことがあるような感じですけど、でも学問として本格的にやり始めたのは大学からです...

古田：そういえば Borsuk-Ulam のあたりの... Borsuk-Ulam じゃなくて Sperner の補題だっけ？

宮澤：ああー！はい、はい。

古田：あれはどういう風に受け止めたんですか？

宮澤：それが伝わった経緯を言うと、古田先生の全学自由ゼミナールを受けた都数の後輩がゼミとかをやっているときに、「こんなん出たんすよ」と言って、パッパッパッって本当にパズルとして出してきました。僕は、後輩とのそのコミュニケーションで受け取ったので、僕はまずパズルとして受け取ったんです。

古田：なるほど。

宮澤：挑戦状として受け取ったので、パズルとして解きました。でもちょっと何かストークスの定理っぽいような、ああいうものが背景にあるのがわかったけれど、でもやっぱりまだそこはガキで、それ以上のことは汲めませんでした。

古田：そういえば Sperner の補題って聞いたことがありますか？

——Borsuk-Ulam はわかるんですけど、それとは関係があるんですか？

古田：Tucker の補題というのが類似のものとしてあって、それが Borsuk-Ulam と関係があるものです。Sperner というのは Brouwer の不動点定理と関係があるものですね。これを題材に全学自由ゼミ

ナールというのをしたら、なぜか他大学までそれが伝わっている、ということをごだいぶ後になって知って驚いたということがありましたね。じゃあその頃はパズル...？

宮澤：そうですね。それで学部に入ってから、数学は早く身につけなきゃいけない道具みたいな感じでした。微積とかでも何でも、使えないと問題が解けないから、早く大学4年間で習う分を終わらせて、またいろんな問題を解こうみたいな気持ちでした。なんて言うんでしょう、習っていることは大学数学ですけど、初めの2年間くらいまで、すごく微妙なところですけど、ちゃんと学問として理解していた部分と、あと心のどこかで算術のように、例えば「 ε - δ の証明をやるときはこういうことを気をつけると証明がパッパッと書けるな」とか、「位相空間論の問題が来た時はこういうことに気をつけるとわかりやすくなりがち」とか、そういうのを考えていました。だからちょっと算術を身につけるような感じでやっていた部分と、本当に学問として面白いかもしれないという部分と、でもそこまでまだ深いところは全然わからなかったですけど。それでだんだん多様体の勉強とかが進んできて学部3年くらいになって、例えば Milnor の「微分トポロジー講義」*1とかいうのを讀んだりしました。

古田：それはどこでやったんですか？ 都数でやったんですか？

宮澤：都数ですね。僕が1年生の頃に、同期の人で読んでいた人とかがいたんですけど、その人はちょっと大変そうにしていました。僕はその頃解析ばかりやっていたんですね。幾何に行くと思ってなくて... 思っていたかもしれないですけど、ずっとフーリエ解析とかをやっていました。最初にちゃんとやったのは Stein-Shakarchi のフーリエ解析の教科書*2でした。でもだんだん多様体とかも勉強して、Milnor の「微分トポロジー講義」より先に西川

先生の「幾何学的変分問題」*3っていうのを讀んで、リーマン幾何とか調和写像を、関数解析わかっていなかったですけど、やりました。でも「幾何って勉強したのに全然使えねえ」という気持ちになってしまって。その時は、具体例を全然知らなかったの。

古田：なるほど具体例、そういえば先ほど学び方でそういうことを言わなかったな。学生の方たちには、non-trivial で一番簡単な例は何かを考えるといいよ、ということはよく言います。例は大事で、それは命題を動かすということの一つですけどね。与えられた定理というのがある時に、それに対して具体例というものをどうやって得るのかという手段になればと思って言うことですけど。具体例がないとね。

宮澤：はい。なんか本当に添字の計算をやり続けて、「これが幾何か...」みたいな（一同笑）。そのとき本当にテンソルの計算だけやっていたんです。でも Milnor の「微分トポロジー講義」とか、Bott-Tu*4はもっと早く読んでいたと思います。Bott-Tu は、最後まで読んでいないと思うんですけど、学部1年か2年の頃ぐらいとかに読んでいました。

古田：Bott-Tu というのは私が学生の頃はなかったんです。それである時誰かが、それはどこだったかな、私がもう助手だった時かわからないけれど、「こういう本が出た」というのがあって、「おお、de Rham を使うと確かに明快だ」と思いましたね。やっぱり微分形式って、代表元とか class とかじゃなくて本当に、そこにある。まあ「もの」だから代表元だけだね。あれわかりやすいよね。

宮澤：本当にわかりやすくて、本当に例使っている計算できたりと楽しかったです。でも Milnor の「微分トポロジー講義」はやっぱり衝撃でした。ストークスの定理が一番大事な de Rham 理論より、もちろん de Rham 理論もとても深いんですけど、

*1 J.W. ミルナー（著）、蟹江幸博（訳）「微分トポロジー講義」、シュプリンガー・フェアラーク東京、1998

*2 エリアス・M. スタイン、ラミ・シャカルチ（著）、新井仁之、杉本充、高木啓行、千原浩之（訳）「フーリエ解析入門」、日本評論社、2007

*3 西川青季「幾何学的変分問題」、岩波書店、2006

*4 R. Bott, W. Tu "Differential Forms in Algebraic Topology", Springer, 1982

Sard の定理を使って transversality をやって、というのが本当に幾何的で。最後は Pontrjagin–Thom construction ですが、本当に多様体を手で触っている感じがして、初めてちゃんと「幾何学が学問として面白い」みたいなところにきました。そこからはもっと学問としてやるようになって、だんだんパズルとしての付き合いは薄れていきました。それで、4 年生のときに指数定理をやったんですが、それは「20 世紀最高の結果」みたいな触れ込みだったので、「それをやるのが一つの到達点」みたいな感じで証明を追いました。それも、パズルでも算術でもなく、学問として勉強したのが 4 年生くらいですけれど。

古田：その Milnor のその本で感激したというのは、やっぱり微分形式をやっていたという背景もあったわけだね。

宮澤：それはあると思いますね。

古田：なるほど。微分形式で一つ議論が展開されるんだけど、それと違うものを Milnor はこんなに vivid に、幾何学としてやるのかという、そういう感動ですね。

宮澤：そういうのもありますね。

古田：ひょっとすると似たことだけれど、ホモトピー理論の基礎って結構いろいろ面倒な定理があったりします。Freudenthal の懸垂定理というのがあるんだけど、あれは Milnor のその本みたいに、本当に幾何学的に理解するやり方っていうのが...

宮澤：ありますね！

古田：それは自分で「ああ、こうか」って思ったんですけど、そういうのは嬉しいですね。

宮澤：嬉しいです！僕も自分でやりました（笑）。Milnor の本を見たら、脳がそれになっているので。Hatcher の “Algebraic topology” の本を見ていたんですけど、三角形分割をとって証明するというやり方も「結局は次元の自由度みたいなものを使っているってことは、じゃあ transversality じゃん」って思って、僕も自分でやりました。

古田：先ほど「学ぶっていうのは」という質問があっ

たけれど、こういうことが学ぶということだったりしますよね。そのとき本当に、Milnor のその本を「ああ、確かに身につけた」というか「学んだ」という感じかもしれないですね。

宮澤：そうですね。

古田：なるほど。そして指数定理。

宮澤：はい。指数定理は、そこまで学べた感じはしなかったです、正直。Heat kernel の方法でやったんですけど、Getzler^{*5}が考えたすごく巧妙な方法を、本当に丸暗記みたいな感じで。今読み返すともう少し詳しくわかるのかもしれないですけど、当時は数学として理解することと丸暗記の間のグレーゾーンみたいなところでした。

古田：それは仕方なかったのかもしれませんが。Getzler の議論って簡単に言うと何かっていうと、微分作用素って、何回微分したかというので、1 階の微分、2 階の微分という風に、ヒエラルキーみたいなものがありますね。それでその係数は数だったり行列だったりするんですけど、Getzler のアイデアというのは、言ってみればその係数の行列のところ、この構造を見て、こういうタイプの行列だったら 1 階の微分と同じみたいだとか 2 階の微分と同じみたいだという風に、そっちの方でもそういうヒエラルキーを作るんですよ。そして行列のそういうヒエラルキーと、本当に微分するというもののヒエラルキーを足し合わせたヒエラルキーというのを考えると、それがすごくうまく働くんです。指数っていうのはある数を取り出すわけですけど、ある数を取り出すときに、そのヒエラルキーのこれより小さいところは無視してかまわないというのが、すごく上手く働いて、本当だったらややこしい計算をしないとキャンセルするってわからないところを、「あ、これ計算しなくてもいい」ってことになったりする。そういう trick ですね。でもこれはその trick を見つけることが偉かったわけですから、それだけ最初に学ぶとその凄さっていうのは逆によくわからなくなってしまうかもしれない。そういう難しさがありますよね。

それで本当は微分形式もそういうものかもしれない

^{*5} Ezra Getzler

いですね。微分形式ってすごいシステムだけれど、微分形式の外微分って座標がないのに、ある種の微分、外微分ですけど、そういうものがちゃんと意味を持つ概念になっているわけですよね。そんなものを見つけちゃった。そうすると、ストークスの定理みたいなものが成り立つ。そうするといろいろなそれまで知られていたものが統一的に扱えるだとか、コーシーの積分定理だとかあの辺りだって扱えるだとか。でも微分形式って枠組みを最初に学ぶと、ちょっとそういう背景というか、重層的なところとか、すごさというか、そういうのがあんまりわからないかもしれない。Getzler のそれもそうですね。

高木貞治の「代数的整数論」*6の脚注みたいところで、「ある本質が露わになるっていうことと、それが記号ですごく便利になるんだけどその本質が隠されるということが、交互に繰り返される」みたいなことを言っているところがあるんですよね。Artin の相互律っていうのがあって、それをある記号で表すみたいところでちょこっと書いてあるんだけど、それは「なるほどな」と思いますよね。さっき言った Getzler のアイデアみたいなものも、形式化するとすごくスマートな形式になっちゃうんだけど、そうすると何が当たり前で何が当たり前じゃないかっていうのがよくわからなかったりとかね。

それから、微分形式よりももうちょっと抽象的な、ただの公理的なコホモロジーの方が、形式的にわかりやすいというところがあって、指数定理なんかもそういうところで見るとかなり整理されるということもあるかもしれないですよね。でも宮澤くんが読んだ証明というのは、多様体をつぶさに見るところに重きが置かれていて、例えてみると、ちょうどさっきの Milnor の本のその幾何学的な面白さみたいなことに通じるような。でもその Milnor の場合と違って、Getzler たちの本の場合には、それを最初に見ると、あまりにもつぶさすぎて、何がそうやらなくてもわかることで、何がそうやることで初めてわかることなのかというその違いがちょっとわ

からないかもしれないですね。なかなか難しいですよね。

宮澤：難しかったですね。

古田：というのが4年生。でも、後で振り返るとそういう風な感想を抱けるように、今はそうやって上から見られるわけですよね。それは自分で使う機会があったからということも大きいですよね。

宮澤：そうですね。あと Witten deformation の議論とかいろいろ知った上で見ると、という感じで。当時は「自分が理解していないこと」も理解できていないとか。「まあ証明追ったし指数定理知ってるよ」って感じてした。

古田：そう、ある人が「すべて」という言葉で何を意味するのか、というところで、見えているものしかすべてと言えないわけですよね。先ほど「奥行き」とか「遠近感」って言ったけれど、自分が見えていないところがあるという認識をある形でするのが大事だっていう気がしますよね。

そして、それからまだ幾段階かあるけれども、それはどうでしたか？

宮澤：その後は、修士に入ったらまず「研究できるのか」とか。それから、古田先生とのセミナーでちょっと覚えているのは、多分 moduli の境界付きの compactness の bootstrap の証明とかだったと思います。それは完璧にやり切ったと思うんです。でもその後に、「これはどういう証明なんだろう？」という話になったんですね。その時もある種「理解すること」と「丸暗記」のグレーゾーンにいて、確か古田先生に、いやその時じゃなかったかな、証明を虫眼鏡でこう（虫眼鏡でものを間近に観察するジェスチャー）して目の前だけを見てこう（流れを間近に見ながら辿るジェスチャー）行くんじゃないくて、何ておっしゃっていたか詳しく覚えていないんですけど、もう少し上から眺めてみて、著者がやったのをこう（虫眼鏡でものを間近に観察するジェスチャー）追うんじゃないくて、もっと一段高いところから見るように、「しましょう」だったか、「もう少しそうするといいです」っていう。

*6 高木貞治「代数的整数論 第2版」、岩波書店、1971

古田：言った方は覚えていないですけど（一同笑）。

宮澤：どういう表現だったかきちんと覚えていないんですけど。虫眼鏡で覗きながら辿るような読み方をしているのってちょっと丸暗記に近いというか、自分の感覚だと。

古田：それが必要だけど、それだけじゃ足りない、ですよ。

宮澤：そういうのからちょっとずつ数学のやり方みたいなものを学びました。元々だいたい近眼的に数学をやっている、というか全体的な傾向として近眼だったんですけど、だんだんいろいろなものが見えてくるようになったなあと思っています。これは僕の場合で、逆の人もいるかもしれないですよ。

古田：修士論文を書く前は、「問題を見つけてそれをなんとかして、未解決の問題を解かなくてはいけない」という焦燥感に駆られていて、どういう問題があるんだろうとか、そういう風だったということを言っていた記憶があるけれど。

宮澤：それもありますね。やっぱり結構忘れてますね（笑）。論文を書くというのは問題を解くということだと思っていたので、「未解決問題を解かなきゃ」という感じでした。「でもそもそも未解決問題は皆どうやって持ってくるんだろう」とか。問題を思いつくのも、今は研究で自分なりに問題を思いつくことってありますけれど、その時に問題を思いつくのと、テストのために作問するってちょっと違う気がするんです。それで僕はどっちもしたことがなかったんですが、研究で解く問題も作問みたいなことだと思っていました。高校の時とか作問はあんまり得意じゃなかったんですよ。たまに何かやっていて面白い問題が出ることはありましたけれど。作問がうまい子がいて、「こいつらには敵わないな」と。入試問題みたいなものを自分で作っちゃうやつもいた、クラスにいたというよりは「大学への数学」*7の「学力コンテスト」のところに、「誰々さんが作りました」みたいな。こんなの作れるやついるんだと。そういうことは自分できないし、どうやって問題見つけるんだろうというのはちょっとあきらめました。

問題見つけるってどういう感覚なんだろうというのがわからなかったので、とにかく問題探さなきゃという感じでしたね。

古田：その当時は自分が暗がりの中にいるとは思わないんだけど、今だんだん周りが明るくなってきて、そうすると、そこにある数学のいろいろな有様、未解決のもあれば、「これは絶対そう簡単には手がかからないだろう」というのもあれば、「これはちょっとやればなんかなりそうだ」とか、いろいろなものが周りに見えてきて、そこをちょっと足を踏み出すというか。あるいは自分の足を踏み下ろすためにはこれをまずやらなきゃだとか、問題を見つけるというよりはそういうような感じですね。どこから、未知の問題を何もなかったところから探し出さなきゃとか、そういう感じでは全然ないですよ。そうなるためには周りが明るくなっているというのかな、だんだん見えてくるということが必要ですよ。

今こういう話をしているけれど恐らくそういう経験があるというか、ある過程を経た人には、「はい」という風に伝わるんだけど、それまではなかなか伝わらないですよ。それは当たり前ですけど。私もそれはわからなかったし。でも、セミナーというのは何か議論で、interaction とか時間を経て、材料をいろいろ使って、一緒に歩いていくというか、そういう場所で何かやってもらえるようになるというか、そういう感じなんですよ。そこをどういう風に説明したら良いかはなかなか難しいけれどね。

そして今D論を頑張っているところですね。

宮澤：はい、大変です。

古田：時間的制約があるから大変ということもありますね。

宮澤：そうですね、やることはわかってるので、やればいいんですけど、単純に「急がなきゃなあ」みたいな。修論より全然気持ちは楽です。

古田：そうですか。

宮澤：いや、わからないです。自分が置かれた状況を理解していないだけかもしれないですけど（一同笑）。修論のときのほうが想像もできなかったの。

*7 東京出版が発行している月刊誌

一体何をやれば僕は研究したことになるんだろうと。

古田：今は、世界で誰も見つけていないことをやっているんだということがありますね。

インタビューというより対談という形の方がいろいろ出てくるかもしれないですね。人にもよるけれど。

——指導学生の立場から聞いておきたいことは何かありますか？

宮澤：独創的な新しい結果、例えば有限次元近似による Seiberg-Witten 理論というのは、もちろん古田先生より前にはなかったわけで、古田先生が作られたわけですが、それくらい新しいものを作る時って、当然その分野は世の中にないわけじゃないですか。それをやっている人たちもいないわけで、そこに向かって進む時ってどういう感覚だったんですか？

古田：今の話を聞いていて、そういう質問が出てくるのは、今日本でゲージ理論をやっている人たちがどういうところでそれに会ったかというのが大きいかもしれません。今の人たちというのは、それがある程度発達、成熟しているところで出会って、いろいろな問題があって、いろいろな例があって、いろいろな道具があって。一つの焦点はそれぞれの道具にどれだけのポテンシャルがあって、どれだけのことがわかるのかというところ、それがわかっていない。だから今ある道具で何ができるのかというのがありし、これが必要だからこの道具のここを改良しようというのがある。そういう中で動いているというのがきつと大きいんじゃないかと思うんだけど、私が出会った時はそうではなかったわけですね。例えばゲージ理論、ゲージ理論だけじゃないけれど。

あと個人的に情報を得るとかそういうのに疎いっていうか、気にしないっていうのは違うけれど、適切にそういう物事に対処する能力がないって言ったほうがいいかもしれない。だから周りと関係なく、自分の中でわかりたいというところから来てるので、何もない新しいところ、かどうかな...

宮澤：古田先生の視点からすると、10/8 に進んでいった道は、進むべき道としてしっかりあったのでしょうか？

古田：そこまで大袈裟なことではなくて、昔からゲー

ジ理論のかなり多くの側面は無限次元の幾何学だと思っていました。そういう見方の影響があったのかもしれないですね。それから先ほど例を具体的に作るのが大事だと言いましたけれど、これも凄く rough な言い方ですけど、そういうものが例えばどこに影響があるのかということ。本当に例えばだからね、今言おうとしているのは何かということ、あることをやるというのが具体的にそこに至る原動力があったというよりは、普段から常々思っていることが導くことがあるという、そういうレベルで例を言おうとしています。それは具体例を作る、目の前のものを大事にするというような立場で研究をするかもしれないし講義もするかもしれないわけですね。

先週の金曜日の集合と位相の講義で Zorn の補題を話したんだけど、それは Zorn の補題という言い方ではなくて、ある半順序集合の具体例を使って、Zorn の補題とほとんど同値な命題を話したんです。Zorn の補題って普通どう証明するかというと、「背理法」でやったりしますよね。背理法って、結局途中で出てくる命題は全部正しくないです（一同笑）。だから情報量が増えないですよ。だから私は、背理法による証明というのは、もちろんすごく有用だしすごく切れ味がいいけれど、その後吟味したくなるんですよ。どう吟味したくなるかということ、私は「からくりを知りたい、単に論理として知るんじゃないで、物事の有様を知りたい」ので、「これを肯定的な形になるように書き換えられないか？」という吟味をしたくなる。Zorn の補題も、もし背理法を使おうとすると問の命題が全部、役に立たないとか意味がないけれど、その半順序集合の例でだったら意味があるわけです。その証明というのは Zorn の補題の証明と同じようにやればいいんだけど、特にそれをいわゆる帰納的集合の場合にやれば、Zorn の補題とほとんど同値な命題になります。そういう具体的な形で言いたくなる。

これは非常に小さなことですけど、人によって、数学をやっている人も人によっていろいろな傾向があると思うけれど、私の場合はこういう風に「ものをちゃんと見たい」とかね。そういうのがあると、研究においても、あるいはこういう教育においても、

やっぱりそういう風にいきますよね。有限次元近似というのも、そういうことがいくつかあって、出てきたことであって。無限次元ってわからないですよ、なんかね。でも有限次元ってわかりますよね。だから言ってみれば toy model なんだけれど、この toy model の中にどれだけ情報が込められているかっていうのを考えると、toy model をどんどんどんどん大きくしていった極限みたいなものを考えればそこに入っているんじゃないか。それも十分大きいって言うけれど有限のところで切っちゃったって入っているんじゃないか。だから物事を具体的に考えるにはこれだけ考えれば、いろいろなすごい複雑なことをして不変量を取り出しているけれど、結局データはみんなこの中に入ってるんじゃないかっていう。やっぱりそうすると何だか手の上にありますよね。

宮澤：ありますね。

古田：そういう発想というか、そういうものですよ。だから新しいところに行こうとしていたとかそういうものじゃなくて、ただものを「ここで見よう」と思っていたっていただけですよ。

でもそういえば、昔 D 論になったもの^{*8}があって、それは「ある群が無限生成だ」っていうもの^{*9}なんですけれど、それをやった後に考えていたのは、確かにこの理論がこの先どう進むべきかということでした。それは、この命題、この議論が、robust というか、設定を色々摂動しても変わらないような形に理論全体になる、そういう方向が絶対あるはずだと思ってそれをいろいろ考えていたんです。そうしたら Floer って人が Floer ホモロジーっていうものをやったんですよ。それでそのときに後で、非常に不遜かもしれないけれど、「どうして私が自分でそれを思いつけなかったのか」ということはやはり考えるわけです。それは、定量的なもの、Chern-Simons invariant の値、というものに、こだわりすぎたせいだった。それを非常に本質的に使ってある議論をやったんですけど、しかし非常に包括的な議論の

ところにワッと抜け出るにはそれを一旦忘れて、進む必要があったというか。これは非常に不遜な言い方かもしれないけれど、Floer がやったことは私から見るとそういう風に見えたわけです。けれどその中でじゃあ自分が、どうしても捨てがたかったというか囚われたものの意義というのを逆に取り返すにはどうしたらいいのか、ということがあって、そういうことに関するのを少し、だいたい後の学生の人たちに「ちょっとこういうのがあるよ」とか言ったりして、谷口くん^{*10}の仕事とかに至るわけですね。だから確かに「これがこの後どう進むべきか」ということを考えることはありますが、でもそれは「世界的にこっちの方に進むべきだ」とかそういうことではなくて、「物事のある姿というのを見ると、こういう見方ができるんじゃないか」とか、そういう感じですね。それが新しいとかそういうことはあんまり関係ない。結果的に他の人が見つけていなければそのまま「新しい」というだけですね。

宮澤：ああ、そういう感じなんですね。

次の質問なんですが、いろいろな幾何学者が「新しい空間像」みたいな話をされるのを聞くことができます。例えば弦理論なんかミラー対称性で、これとこれがミラーで区別できない、観測できないんだしたら、これはちょっと今扱ってる空間像というのが細かすぎているので、「新しい空間像」が必要じゃないとか。例えば僕はちゃんと理解していないんですけど、大森英樹先生とか、いろいろな人がいろいろな文脈で「新しい空間」ということをおっしゃると思うんですけど、「新しい空間」というものについてはどう考えていらっしゃるのでしょうか？

古田：そうですね... 確かにいろいろな人がいろんなことをしていて、その中で非常に drastic というか、非常に根底的なものの見方もあれば、ある現象を取り入れるっていうぐらいのこともあるし、いろいろありますね。今はいくつか具体的なことを考えているんだけど、例えば A_∞ -category という、深谷圏

^{*8} Mikio Furuta, Homology cobordism group of homology 3-spheres. Invent. Math. **100** (1990), no. 2, 339–355.

^{*9} MathSciNet のレビューによると, "This paper proves the startling result that Θ_3^H , the integral homology cobordism group of oriented integral homology 3-spheres, is infinitely generated."

^{*10} 谷口正樹

というのもその一つですね。あれはかなり根底的なものだと思います。一方、ちょっと個別の話になるんだけど、森田くん^{*11}が Conley index の構成に使った...

宮澤：Condensed math?

古田：そうそう、あれもおそらくかなり根底的なものなんだろうと思います。それはだから違う方向にすごく大きなものというのがあるけれど、それは必然性を持って各々現れているんだと思います。

一方で、これまであんまり言っていなかったかもしれないけれど、自分が何ができるんだろうという、そういう視点もありますね。自分の今いる位置というのがあって、それは知っていることとか、能力だとか、時間だとか、いろいろな制約もありますけれど、そういう制約のある人たちが研究者集団になって contribute しているわけですね。だから自分がどういう価値あることを生み出せるかと言ってもいいですけどね。でも価値っていうのは非常に曖昧な、便利なようで曖昧な言葉です。結果的に価値があるとしかわからないようなものですね。それでそのときに、「新しい空間像」に近いようなことについて何ができるかという、無限次元を有限次元に近似するということのちょっと延長上で、こういうことがあってもいいなというものがあります。それは一種類じゃなくていくつか変種みたいなものをちょっと考えたり夢想したりしてしまして、でもそういうものは「実際それがどこか具体的なところにちゃんとこう使われ得る」ということがわかって「あ、確かにこれは意味がある」となりますよね。それから、茫漠としたアイデアだけじゃなくてそれはちゃんと数学的に書く必要がありますよね。だから「新しい空間像」というほどの大袈裟なことではないと思うんだけど、具体的な、非常に具体的な... だからつまりどういうことを考えていたのかっていうと、その最初のマイナス一歩かゼロ歩かぐらいのことというのは、指数定理の本^{*12}を書いた時に書きました。K 群の定義の時に「こんなこと本当はね、あんな本

使って書きちゃいけないんだけど」というようなことを。普通の vectorial bundle という考え方ですけど。あれは、あそこでは指数定理の周辺でそういうものを使うと一つの定式化ができるということで、とりあえず書き下したけれど、本当にやりたかったのは、やっぱり Seiberg–Witten 理論とかそういうところでそういうことをやるときっといいことがあるだろうと思っていたわけです。

宮澤：Floer homotopy type の、obstruction がある場合...?

古田：その通りです。今は obstruction がある場合には covering を取ったり、あるいは obstruction がない場合は spectral section を取ってやるという議論がありますけれど、どちらもだいたいテクニカル。テクニカルというか、テクニカルっていうのはある立場から見るとテクニカルということだからテクニカルって言う時には既にちょっと一つバイアスがかかっているけれど、やっぱりもっと自然にできて然るべきだっていう風に思っています。それでそのための入れ物として、vectorial bundle というのを使うことができるだろうなというのが一つにはあります。というのが一つで、そのフーリエ変換に当たるようなものとして、何か空間の方の有限次元近似があるとかそういう描像ができるとすごくいいなとは思うんだけど。

宮澤：フーリエ変換にあたるというのは...?

古田：ごめんなさい。物理で空間と運動量というのは Fourier 変換ですね。そしていわゆる有限近似っていうのはラプラシアン固有値で切るようなものだから、運動量空間で有限化するようなものですね。「運動量のうんと高いところを切る」というのは、空間で言うと、「空間の非常に短いところを見ないことにする」。これというのは例えば lattice 近似する、格子近似するというようなことですね。その両者の間に、ある関係がついたらすごくいいなと思いますけれど、それはだいたい先の話です。だから関係がつく前にまず空間レベルのことを確立する必

^{*11} 森田陽介

^{*12} 古田幹雄「指数定理」、岩波書店、2008

要があって、そこで例えば切り貼りの議論だとか、もっと具体的に言うと、4次元で Rochlin の定理っていうのがあってそれは Dirac operator を扱いますが、その Dirac operator と指数定理を使うのではなくて、その格子近似の Dirac operator を使って証明できたらそれは面白いだろうなと思いますね、具体的な目標として。だから、空間の拡張概念というのをバツと据えるわけではないけれど、それと無関係ではないあたりで具体的なものとしてこういうものがあるかな、というのはいくつかありますね。「自分

にできること」と言いましたけれど、私ができることと言ったらそういう方向のことかなってちょっと思っています。逆に言うと他のことは、ちょっと私の手に負えないかもしれないというのがあります。

宮澤：ありがとうございました。

古田：こんなところですかね。すみませんなんか、長くなっちゃいましたが。別に終わりにしなくてもいいですけど（一同笑）。

——本日は長時間にわたりインタビューに答えていただき、大変ありがとうございました。